

Traitement du signal

Matthieu Kowalski

Table des matières

1. Introduction générale	7
2. Traitement du signal analogique	9
2.1. Signaux périodiques	9
2.1.1. Coefficients de Fourier et séries de Fourier	10
2.1.2. Coefficients trigonométriques	13
2.1.3. Séries de Fourier et traitement du signal	14
2.2. Signaux et systèmes analogiques : vu d'ensemble	15
2.2.1. Définitions	16
2.2.2. Signaux élémentaires	17
2.2.3. Systèmes analogiques	19
2.3. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps continu (TFTC)	21
2.4. Récapitulatif : Fourier analogique	26
2.5. Filtrage analogique	27
2.5.1. Un outil d'analyse : la transformée de Laplace	27
2.5.2. Rappels et définitions	29
2.5.3. Exemple : le filtre RC	31
2.5.4. Filtres idéaux	32
2.5.5. Filtres dynamiques continus	33
3. Traitement du signal numérique	35
3.1. Introduction : signaux et systèmes numériques	35
3.1.1. Définitions	35
3.1.2. Signaux élémentaires	36
3.1.3. Systèmes numériques	38
3.2. Échantillonnage	40
3.2.1. Théorème d'échantillonnage	40
3.2.2. L'échantillonnage en pratique	42
3.2.2.1. Repliement spectral	42
3.2.2.2. Signaux à temps limité et à bande limitée	43
3.3. Signaux stable et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps discret (TFTD)	44
3.4. Filtrage numérique	45
3.4.1. Un outil d'analyse : la transformées en z	45
3.4.2. Filtrage : rappels et définitions	47
3.4.3. Filtres FIR ou MA	49
3.4.3.1. Définition	49

Table des matières

3.4.3.2. Synthèse par fenêtrage	49
3.4.4. Filtre IIR	52
3.4.5. Synthèse de filtre IIR	53
3.4.5.1. Spécifications	54
3.4.5.2. Filtres classiques	54
3.5. Signaux numériques finis	57
3.5.1. Filtres finis et convolution circulaire	57
3.5.2. La transformée de Fourier finie (TFF)	57
3.6. Récapitulatif : Fourier pour les signaux à temps discret	58
4. Signaux aléatoires	61
4.1. Définitions	61
4.2. Descripteurs	62
4.3. Spectre d'un signal aléatoire	64
4.4. Bruit blanc	65
4.5. Filtrage des signaux aléatoires	65
5. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle	69
5.1. Analyse temps-fréquence	70
5.1.1. Principe d'incertitude d'Heisenberg	70
5.1.2. Transformée de Fourier à fenêtre	73
5.1.2.1. Définition et inversion	73
5.1.2.2. Choix de la fenêtre	75
5.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue	76
5.2.1. Définitions	76
5.2.2. Reconstruction et conservation de l'énergie	77
6. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes	81
6.1. Bases de cosinus locaux et MDCT	81
6.2. Construction de bases d'ondelettes	83
6.2.1. Analyse multirésolution et bases d'ondelettes orthogonales	83
6.2.2. Ondelettes et bancs de filtres	86
6.2.2.1. Algorithme de Mallat	87
6.2.3. Propriétés des ondelettes	88
6.2.4. Exemples d'ondelettes	90
6.2.4.1. Ondelette de Haar	90
6.2.4.2. Ondelette de Meyer	90
6.2.4.3. Ondelettes de Battle-Lemarié	91
6.2.4.4. Ondelette de Coifman	91
6.2.4.5. Ondelettes de Daubechies	92
6.2.5. Ondelettes biorthogonales	92
6.2.6. Construction de bases d'ondelettes en dimension supérieure (2D)	94
6.3. Un exemple de transformée en ondelettes	94

7. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal	97
7.1. Approximation linéaire	97
7.1.1. Approximation dans les espaces de Sobolev	98
7.1.2. Base de Karhunen-Loève	98
7.2. Approximation non linéaire	100
7.2.1. Approximation non linéaire dans une base d'ondelettes	100
7.3. Estimation	102
7.3.1. Estimateurs de Wiener	102
7.3.2. Risque minimax	103
7.3.3. Estimation dans une base de L^2	104
7.3.3.1. Le problème d'estimation dans une base	104
7.3.3.2. Construction des estimateurs	105
7.3.4. Estimation minimax dans un espace de Besov	108
7.3.4.1. Estimation minimax dans $B_p^{s,\infty}$	108
7.3.4.2. Estimateurs par ondelettes dans un espace de Besov .	109
7.3.4.3. Estimateur par projection	109
7.3.5. Estimateurs par seuillage	109
7.3.5.1. Estimateur SURE du seuil pour le seuillage doux . . .	110
7.3.6. Un exemple de seuillage	110
8. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse	113
8.1. Utilisation de la redondance	113
8.2. Retour sur Gabor	115
8.3. Approximation parcimonieuse	116
8.3.1. Approche Greedy (Matching Pursuit)	117
8.3.2. Approche variationnelle	118
A. Rappels mathématiques	121
A.1. Normes et convergences	121
A.2. Produits scalaires et espaces de Hilbert	122
A.3. Bases orthonormées	124
B. Notions d'optimisation convexe	127

1

■ Introduction générale

On appelle *signal* une représentation physique qui transporte une “information” depuis une source vers un destinataire. Le terme signal vient surtout du génie électrique : c’est une grandeur physiquement mesurable par un capteur, pouvant varier avec le temps. Ce terme désigne aujourd’hui une grande variété de signaux physiques rencontrés, comme les signaux de paroles ou de musiques, les signaux radars ou bien les images et les vidéos. Un signal aura donc souvent la dimension d’un temps (par exemple, un signal de parole est la mesure de la variation de la pression au cours du temps), mais aura de façon générale une dimension vectorielle (1D pour le temps, 2D pour les images – chaque dimension étant les coordonnées d’un point lumineux – 3D pour la vidéos etc.).

Ce cours se limitera aux signaux temporels. Si les signaux analogiques, mathématiquement par une fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x(t)$, sont abordés, une place importante est consacrée aux signaux discrets, représentés par les suites numériques $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto x[t] = x_t$. La représentation spectrale d’un signal, qui correspond à son contenu fréquentiel (penser à de la musique!) y tient une place particulière, et l’analyse de Fourier en est l’outil principal. La notion de filtre y est aussi largement abordé, les filtres étant un moyen d’agir directement sur le contenu spectral d’un signal. On verra les conditions pour pouvoir réaliser un filtre donner, et comment les approcher numériquement.

La modélisation aléatoire des signaux y est abordée sous l’angle numérique uniquement. Le contexte numérique permet de se raccrocher facilement aux cadre des suites de variables aléatoires (discrètes ou continues).

Enfin, le cours se termine sur des outils d’analyses modernes du traitement du signal avec l’analyse temps-fréquence et l’analyse temps-échelle. On voit comment construire des bases Hilbertiennes exploitant ces propriétés, qui ont permis la naissance des codeurs performant tels que MP3 et JPEG-2000. Enfin, on conclut en abordant le problème de la synthèse parcimonieuse des signaux à l’aide de dictionnaire (construit sur les approches temps-fréquence ou temps-échelle), qui est aujourd’hui l’état de l’art pour aborder les problèmes inverses.

2 ■ Traitement du signal analogique

2.1. Signaux périodiques

Les séries de Fourier ont été introduites par Jean-Baptiste Fourier (dit Joseph Fourier) en 1822, dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur* : il propose de modéliser l'évolution de la température par des séries trigonométriques. Il énonce qu'une fonction peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, et qu'il est facile de prouver la convergence de celle-ci. Il juge même toute hypothèse de continuité inutile!

Le cadre de cette partie consacrée aux séries de Fourier est celui des fonctions T -périodiques. Un signal s périodique de période T est défini comme une fonction $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout t , $s(t + T) = s(t)$. Un exemple simple de signal périodique est le signal sinusoïdale $s(t) = \sin(t)$ représenté la figure 2.1.

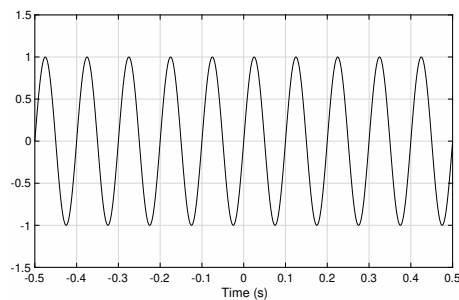


FIGURE 2.1. – Fonction sinus.

Ces signaux ne sont pas physiquement réalisables car à temps infini. Cependant, ils sont d'une importance majeure pour la modélisation et la compréhension des signaux rencontrés. Un exemple parlant est celui d'une note de musique (par exemple, une note de piano), qui peut être vue comme une somme de sinusoïdes qui oscillent à différentes fréquences (cf. figure 2.1)

Dans la suite, sauf mention contraire, on considère des fonctions de l'espace de Hilbert $L^2([0, T])$, c'est à dire les fonctions de carré intégrable sur $[0, T]$ de période

2. Traitement du signal analogique

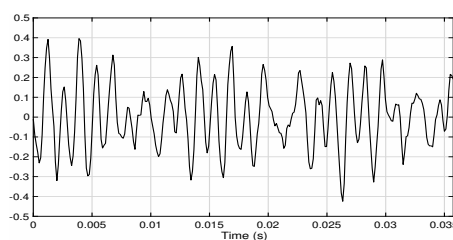


FIGURE 2.2. – Zoom sur une partie d’une note de piano. Cette partie oscillante peut être vue comme une somme de sinusôides qui oscillent à différentes fréquences

T . Le produit scalaire associé est défini, pour tout $f, g \in L^2([0, T])$ par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt,$$

et la norme induite est donc

$$\|f\| = \left(\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Remarquons que $L^2([0, T]) \subset L^1([0, T])$ par conséquence de l’inégalité de Cauchy-Schwartz, donc les fonctions considérées sont intégrables sur une période.

2.1.1. Coefficients de Fourier et séries de Fourier

Théorème 2.1 (Base des fonctions périodiques)

La famille des fonctions trigonométriques $\{t \mapsto e^{i \frac{2\pi}{T} nt} = e_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2([0, T])$.

Par conséquence, pour $f \in L^2([0, T])$, la coordonnée de f selon le n -ième vecteur de base se calcule par produit scalaire entre f et e_n . Ces coordonnées sont appelées coefficients de Fourier complexes.

Définition 2.1 (Coefficients de Fourier complexes)

Soit $f \in L^2([0, T])$, on appelle coefficients de Fourier complexes de f les nombres :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 2.1 (Quelques propriétés utiles)

Soit $f, g \in L^2([0, T])$. Alors

$$1. \quad c_n(f + g) = c_n(f) + c_n(g)$$

2. $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
3. Soit $g : t \mapsto f(-t)$, alors $c_n(g) = c_{-n}(f)$
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : t \mapsto f(t - a)$, alors $c_n(f_a) = e^{i\frac{2\pi}{T}na} c_n(f)$
5. Si f est k fois dérivable, alors $c_n(f^{(k)}) = \left(i\frac{2\pi}{T}n\right)^k c_n(f)$

Démonstration. La majorité des preuves se font en utilisant les propriétés classiques de l'intégrales et par changement de variable.

1. Conséquence de la linéarité de l'intégrale

2.

$$\begin{aligned}\overline{c_{-n}(f)} &= \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} dt} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{f}(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= c_n(\bar{f})\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(-t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^{-T} f(u) e^{i\frac{2\pi}{T}nu} du \quad (u = -t) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= c_{-n}(f)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t - a) e^{-i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-a}^{T-a} f(u) e^{-i\frac{2\pi}{T}n(u+a)} du \quad (u = t - a) \\ &= \frac{e^{-i\frac{2\pi}{T}na}}{T} \int_0^T f(t) e^{i\frac{2\pi}{T}nt} dt \\ &= e^{-i\frac{2\pi}{T}na} c_n(f)\end{aligned}$$

2. Traitement du signal analogique

5. On commence par calculer $c_n(f')$:

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} \right]_0^T + \frac{i \frac{2\pi}{T} n}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt \quad (\text{I.P.P.}) \\ &= i \frac{2\pi}{T} n c_n(f) \end{aligned}$$

La généralisation se fait par une récurrence immédiate.

□

On définit les séries de Fourier à partir de ces coefficients.

Définition 2.2

(Série de Fourier)

On appelle série de Fourier de $f \in L^2([0, T])$, notée $S(f)$ la série

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} nt}.$$

Immédiatement, la famille des $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant une base orthonormée, l'analyse hilbertienne nous donne le résultat de convergence suivant

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \right\| = 0$$

et la conservation de l'énergie :

Théorème 2.2

(Plancherel-Parseval)

Soit $f \in L^2([0, T])$ et $\{c_n(f)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Alors

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Soit $g \in L^2([0, T])$ et $\{c_n(g)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Alors

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \bar{c}_n(g)$$

Si la convergence des séries de Fourier est assurée au sens de la norme, reste la question de savoir quand une fonction est-elle égale à sa série de Fourier? La réponse à cette question est donnée par le théorème de Dirichlet. Avant d'établir la convergence ponctuelle et la relation entre f et sa série de Fourier, on peut déjà donner la propriété suivante découlant directement de la convergence dans L^2 des séries de Fourier :

Proposition 2.2 (Décroissance des coefficients)

Soit $f \in L^2([0, T])$, alors

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$$

Il y a ainsi une atténuation des coefficients pour les “grandes fréquences”. C’est une conséquence du principe de portée générale “plus la fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier convergent rapidement vers 0”.

On donne maintenant une condition suffisante de convergence ponctuelle de la série de Fourier.

Théorème 2.3 (Dirichlet)

On suppose $f \in C^1$ par morceau sur $[0, T]$. Pour tout $t_0 \in [0, T]$, la série de Fourier de f en t_0 converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en t_0 . Autrement dit :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} n t_0} = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}.$$

En particulier, si f est de plus continue en t_0 , alors $f(t_0)$ est égale à sa série de Fourier évaluée en t_0 .

2.1.2. Coefficients trigonométriques

Lorsque la fonction f possède certaines propriétés de parités, on peut aussi définir les coefficients de Fourier trigonométriques.

Définition 2.3 (Coefficients de Fourier trigonométriques)

Soit $f \in L^2([0, T])$, on appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f les nombres :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) dt \quad \forall n \geq 1 \\ b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n t\right) dt \quad \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

On peut bien sûr déduire les coefficients trigonométriques à partir de coefficients complexes et vice-versa, qu’on résume dans la proposition suivante (dont la preuve est obtenue par simples calculs)

Proposition 2.3 (Liens coefficients complexes/trigonométriques)

2. Traitement du signal analogique

Soit $f \in L^2([0, T])$

$$c_0(f) = a_0(f) \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - i b_n(f)}{2} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + i b_n(f)}{2}$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Les coefficients trigonométriques sont particulièrement intéressants lorsque f possède certaines propriétés de symétries.

Proposition 2.4 (Coefficients trigonométriques et parité)

Soit $f \in L^2([0, T])$.

- Si f est paire, alors $\forall n \geq 1 \quad b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(\frac{2\pi}{T} n t) dt$
- Si f est impaire, alors $\forall n \geq 0 \quad a_n(f) = 0$ et $\forall n \geq 1 \quad b_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(\frac{2\pi}{T} n t) dt$

Démonstration. La preuve est immédiate en exploitant l'hypothèse de parité de la fonction. $\square$

La série de Fourier de f s'écrit alors

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(\frac{2\pi}{T} n t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(\frac{2\pi}{T} n t),$$

et le théorème de Plancherel-Parseval :

$$\|f\|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2.$$

2.1.3. Séries de Fourier et traitement du signal

Les séries de Fourier permettent de décomposer n'importe quelle fonction périodique comme une somme infinie d'éléments de bases, qui sont les fonctions trigonométriques. En pratique, on est obligé d'utiliser une somme finie. Il est donc important de connaître le comportement des sommes partielles des séries de Fourier.

Lorsque la fonction est partout continuellement dérivable, la série de Fourier converge ponctuellement très vite vers la fonction f . Les problèmes commencent lorsque f présente une singularité. Prenons par exemple la fonction créneauux : soit $f \in L^2([-\pi, \pi])$ telle que

$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ f(t) = -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

La fonction f est impaire, on calcule donc les coefficients

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(n t) dt.$$

2.2. Signaux et systèmes analogiques : vu d'ensemble

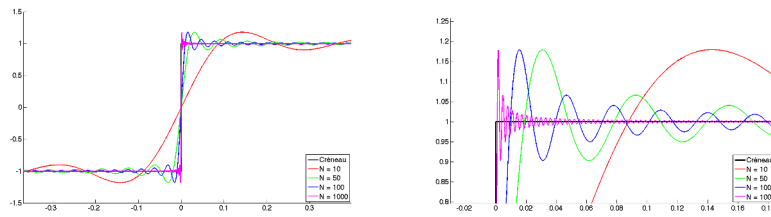


FIGURE 2.3. – Illustration du phénomène de Gibbs sur la fonction créneau. Gauche : 1 période. Droite : zoom sur une discontinuité.

Le calcul donne :

$$S(f)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t) .$$

La figure 2.3 illustre le comportement des sommes partielles de la série de Fourier associée à la fonction créneau, qui présente des discontinuités de première espèce. Quand N grandit, le graphe de $S_N(f)$ présente un dépassement constant près des discontinuités de la fonction originale.

Décomposer une fonction périodique en série de Fourier nous permet de connaître son contenu fréquentiel, ie. de savoir “combien” il y a de sinus et de cosinus pour les différentes fréquences d’oscillation. Le rapprochement avec les notes de musiques est immédiat : celle-ci est constituée d’une note *fondamentale*, puis d’une succession d’*harmoniques*. Une décomposition en série de Fourier fera apparaître un pic principal à sa fréquence fondamentale (la note), et des pics d’amplitudes décroissantes aux différents harmoniques venant avec les fréquences supérieures.

La représentation de l’amplitude des coefficients de la série de Fourier en fonction des fréquences est appelée *représentation spectrale* de la fonction.

2.2. Signaux et systèmes analogiques : vu d'ensemble

Les signaux analogiques sont des signaux à temps continu. Il seront représentés par des fonctions mathématiques d’une variable réelle (en général, le temps) à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto s(t) . \end{aligned}$$

Les signaux analogiques sont un modèle pour les signaux “naturels” mesurés à l’aide de divers capteurs physiques. On considérera plusieurs classes de signaux : les signaux périodiques et les signaux à temps fini, ainsi que les signaux réalisables.

2. Traitement du signal analogique

2.2.1. Définitions

On donne ici des définitions utiles au traitement du signal, permettant de caractériser des propriétés physiques essentielles comme la causalité, la stabilité ou l'énergie d'un signal. On s'attardera ensuite sur deux modèles particuliers : les signaux périodiques et les signaux à support temporel finis.

Définition 2.4 (Signal analogique causal)

Un signal causal est un signal qui débute à une date $t = 0$. Plus précisément, soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique. s est un signal causal ssi

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 .$$

Un signal qui n'est pas causal sera dit **acausal**. Un cas particulier de signal acausal est le signal anti-causal. De manière analogue, on peut définir les signaux anti-causaux :

Définition 2.5 (Signal analogique anti-causal)

Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique. s est un signal anti-causal ssi

$$s(t) = 0 \text{ pour } t > 0 .$$

On représente sur la figure 2.2.1 un exemple de signal (sinusoïdal) acausal (2.4(a)), un exemple de signal causal (2.4(b)) (un sinusoïde qui démarre à $t = 0$) et un signal anti-causal (2.4(c))

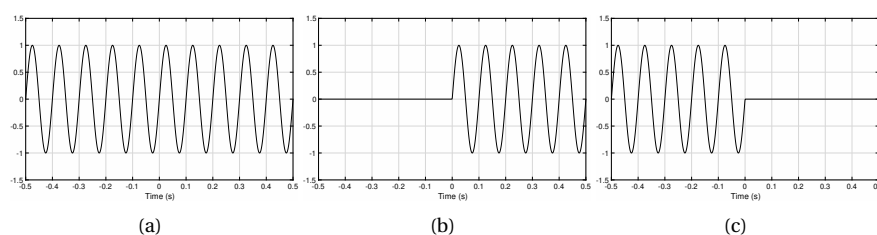


FIGURE 2.4. – a) signal acausal. (b) signal causal. (c) signal anti-causal

Pour un signal, la notion de causalité viendra surtout de l'origine des temps pris pour référence. Si l'on s'intéresse à l'évolution de la température depuis le *XVIII^e* siècle jusqu'à nos jours, ce signal pourra être considéré comme causal si l'on prend pour origine des temps la date de première mesure, ou comme anticausal si l'origine des temps est aujourd'hui.

Définition 2.6 (Signal analogique stable)

2.2. Signaux et systèmes analogiques : vu d'ensemble

Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique. On dira que s est stable si $s \in L^1(\mathbb{R})$, ie

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < +\infty .$$

Une conséquence direct de la stabilité, est qu'un signal stable est **borné**. On voit que cette condition semble nécessaire afin qu'un signal puisse "réellement" exister.

Ces définitions permettent de définir la notion de signal "réalisable", c'est à dire qui puisse exister physiquement.

Définition 2.7 (Signal réalisable)

Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique. s est dit réalisable s'il est à la fois stable et causal.

Définition 2.8 (Énergie d'un signal analogique)

Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique. L'énergie d'un signal est sa norme 2 élevée au carré $\|s\|_2^2$:

$$\|s\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt .$$

Définition 2.9 (Signal analogique à énergie finie)

Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ un signal analogique. s est à énergie finie s'il est dans $L^2(\mathbb{R})$, ie sa norme 2 est bornée :

$$\|s\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < +\infty .$$

2.2.2. Signaux élémentaires

On présente ici quelques signaux élémentaires rencontrés fréquemment en traitement du signal. On donne la définition discrète et continue pour chaque signal.

Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac joue un rôle essentiel dans l'échantillonnage des signaux analogiques, mais aussi pour la caractérisation des filtres. Sa définition fait appel à la notion mathématique de *distribution*.

On trouve souvent une définition dite *du physicien*, qui s'écrit comme

$$\delta_0(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

tel que

$$\int \delta_0(t) dt = 1 .$$

2. Traitement du signal analogique

Il faut cependant toujours avoir à l'esprit que cette définition n'a mathématiquement **aucun sens!** et est donc normalement proscrite, bien qu'elle a le mérite d'illustrer simplement les choses. L'impulsion de Dirac *n'est pas une fonction* mathématique, mais une *distribution*. Sans entrer dans les détails, la distribution de Dirac δ_0 est une forme linéaire définie sur un espace de fonctions tests $\mathcal{D}$, telle que pour $f \in \mathcal{D}$:

$$\langle \delta_0, f \rangle = \int f(x) \delta_0(x) dx = f(0) .$$

Et de façon plus générale, on définit δ_t la distribution de Dirac telle que pour $f \in \mathcal{D}$

$$\langle \delta_t, f \rangle = \int f(x) \delta_t(x) dx = f(t) .$$

Une représentation de l'impulsion de Dirac est donnée sur la figure 2.2.2.

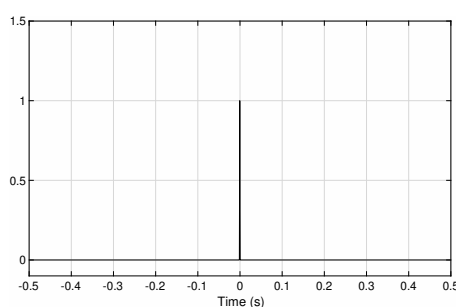


FIGURE 2.5. – Impulsion de Dirac δ_0 .

Signal échelon (Heaviside)

Une autre fonction élémentaire est la fonction de Heaviside, aussi appelée fonction échelon ou marche.

Dans le cas continue, la définition s'adapte directement.

Définition 2.10

(Fonction de Heaviside)

La fonction de Heaviside est la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation de la fonction de Heaviside est donnée sur la figure 2.2.2.

Signal porte

Le signal porte servira essentiellement lors des opérations de filtrage dans le domaine fréquentiel. Il est représenté sur la figure 2.2.2.

2.2. Signaux et systèmes analogiques : vu d'ensemble

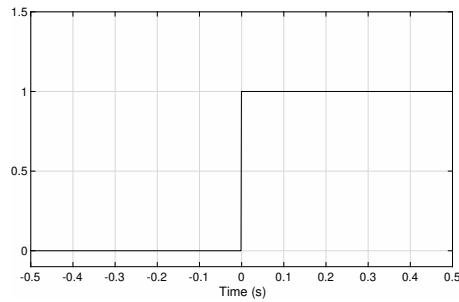


FIGURE 2.6. – Fonction de Heaviside.

Définition 2.11 (Fonction porte)

La fonction porte est la fonction $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

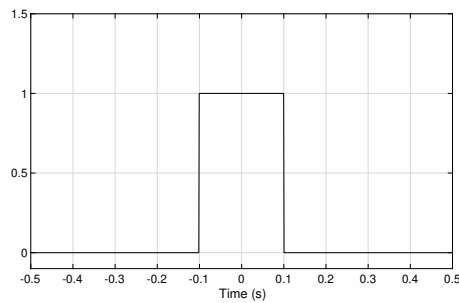


FIGURE 2.7. – Fonction porte.

2.2.3. Systèmes analogiques

On définit la notion de système de façon très générale, pour arriver sur un cas particulier : le système linéaires invariant dans le temps, aussi appelés *filtres*. On définira alors quelques notions essentielles à la caractérisation de ces filtres.

Les notions de signal et de système sont intimement liées, un signal étant toujours véhiculé par un système de transmission. On représente généralement un système comme sur la figure 2.8. Le signal $x(t)$ est appliqué à l'entrée du système $\mathcal{S}$ qui délivre en réponse le signal $y(t) = \mathcal{S}(x(t))$ en sortie. On peut donc modéliser un système comme un opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ qui associe à un signal de l'espace des signaux d'entrée $\mathcal{X}$, un signal de l'espace de sortie $\mathcal{Y}$.

2. Traitement du signal analogique

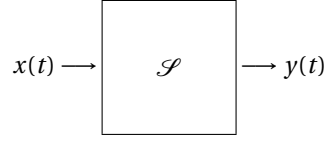


FIGURE 2.8. – Schéma d'un système.

Définition 2.12 (Excitation/Réponse)

L'entrée d'un système s'appelle *l'excitation* et la sortie *la réponse*.

Définition 2.13 (Système linéaire)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de signaux à temps continu. Un système $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est linéaire s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$y(t) = \mathcal{S}(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} h(t, \theta) x(\theta) d\theta .$$

Un système linéaire invariant dans le temps est simplement un système linéaire qui peut s'écrire comme une convolution et s'appelle alors un *filtre*.

Définition 2.14 (Filtre analogique)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de signaux à temps continu. Un système linéaire $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est invariant dans le temps s'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$y(t) = \mathcal{S}(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} h(t - \theta) x(\theta) d\theta = h * x .$$

On appelle un tel système un filtre analogique de **réponse impulsionnelle** h .

Dans les définitions ci-dessus h est appelé la *réponse impulsionnelle* du système. En effet, si on applique l'impulsion de Dirac comme excitation à l'entrée du système, on retrouve bien $y = h$ comme réponse en sortie.

Définition 2.15 (Filtre causal)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h (à temps discret ou continu). Le filtre est dit causal si h est un signal causal (cf. définition 2.4)

Ainsi, pour un filtre causal de réponse impulsionnelle h , l'opération de filtrage

2.3. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps continu (TFTC)

(qui est une convolution) d'un signal x s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) &= (h * x)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau . \end{aligned}$$

Ainsi, pour calculer le signal filtré y à la date t , seule la connaissance du "passé" du signal x est nécessaire. En effet, dans l'opération ci-dessus, seuls les $x(\tau)$ pour $\tau \leq t$ interviennent dans le calcul. Il y a donc bien une relation de "cause à effet".

La causalité n'est pas suffisante pour pouvoir réaliser un filtre en pratique, il faut ajouter à cela la stabilité du filtre dont la définition est basée sur la stabilité de sa réponse impulsionnelle

Définition 2.16 (Filtre stable)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h . Le filtre est dit stable si h est un signal stable (cf. définitions 2.6).

On peut alors définir un filtre réalisable :

Définition 2.17 (Filtre réalisable)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h . Le filtre est dit réalisable s'il est stable et causal.

2.3. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps continu (TFTC)

On a vu dans la section précédente comment approcher n'importe quelle fonction périodique de $L^2([0, T])$ comme une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques. Les coefficients de ces combinaisons forment le spectre et permettent de connaître le contenu fréquentiel. Une question naturelle est alors l'extension d'une telle analyse spectrale aux signaux à temps continu non périodiques? Cette généralisation se fait avec l'analyse de Fourier.

Définition 2.18 (Transformée de Fourier)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f , notée $\hat{f}$, est définie par

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt .$$

2. Traitement du signal analogique

Remarque 2.1 (Autres définitions)

On peut trouver deux autres définitions de la transformée de Fourier, qui diffèrent légèrement. Elles sont données par

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

La définition 2.1 utilise la variable ω interprétée comme une fréquence en radian par seconde (ou “pulsation”), alors que dans la définition 2.18 la variable ν s’interprète comme une fréquence en Hertz. La définition 2.2 fait apparaître une constante multiplicative jouant le rôle de normalisation par rapport à 2.1

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, ie. f est sommable, la quantité $\hat{f}$ est bien définie pour tout $\nu \in \mathbb{R}$. On a alors les propriétés suivantes

Proposition 2.5 (Décroissance de la TFFT en fréquence)

si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est continue, bornée et

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \hat{f}(\nu) = 0.$$

Une propriété analogue de décroissance vers 0 a été vue avec les séries de Fourier. On retrouve cette propriété ici, où plus $\hat{f}$ tend rapidement vers 0, plus f sera “régulière”.

Maintenant qu’on est capable de faire l’analyse spectrale d’une fonction sommable, la question de sa reconstruction à partir de sa transformée de Fourier vient rapidement. L’information spectrale contenue dans $\hat{f}$ permet effectivement de retrouver la fonction f originale. Il n’y a pas de “perte” d’information.

Théorème 2.4 (Inversion de la transformée de Fourier)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Si f est continue en t , alors

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu.$$

Démonstration. On donne ici une démonstration abusive de ce résultat, en écrivant que la transformée de Fourier d’un Dirac existe et est donnée par :

$$\hat{\delta}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = 1$$

et plus généralement, en notant $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$

$$\hat{\delta}_\tau(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t - \tau) e^{-i2\pi\nu t} dt = e^{-i2\pi\tau}$$

2.3. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps continue (TFTC)

Et inversement la fonction constante $e^{-i2\pi\tau}$ admet pour transformée de Fourier inverse le Dirac à l'instant τ . On voit clairement qu'une telle transformée de Fourier et son inverse n'existe pas telle que définit précédemment. On indiquera ensuite comment lever cet abus.

On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) e^{i2\pi vt} dv &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i2\pi v\tau} d\tau e^{i2\pi vt} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{i2\pi v(t-\tau)} d\tau dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi v\tau} e^{i2\pi vt} dv d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ &= f(t)\end{aligned}$$

La version rigoureuse de cette démonstration utilise une suite $e^{\varepsilon v^2}$, puis fait tendre ε vers 0 ($e^{\varepsilon v^2}$ tend alors vers le Dirac) et fait appel au théorème de convergence dominée pour inverser limite et intégrale. $\square$

Remarque 2.2 (Autres définitions)

Avec les autres définitions, les formules de reconstruction deviennent respectivement :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.5)$$

Outre donner un point de vue fréquentiel sur les fonctions, la transformée de Fourier possède un certain nombre de propriétés intéressantes.

Proposition 2.6 (Propriétés de calculs)

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}, \hat{g}$ leurs transformées de Fourier respectives.

1. Convolution :

$$\widehat{f * g}(v) = \hat{f}(v) \hat{g}(v)$$

2. Multiplication :

$$\widehat{f \cdot g}(v) = (\hat{f} * \hat{g})(v)$$

3. Translation : soit $g_a(t) = f(t-a)$

$$\hat{g}_a(v) = e^{-i2\pi av} \hat{f}(v)$$

2. Traitement du signal analogique

4. Modulation : soit $g_\theta(t) = e^{i2\pi\theta t} f(t)$

$$\hat{g}_\theta(v) = \hat{f}(v - \theta)$$

5. Changement d'échelle : soit $g_s(t) = f(t/s)$

$$\hat{g}_s(v) = |s| \hat{f}(sv)$$

6. Dérivée temporelle :

$$\widehat{f^{(p)}}(v) = (i2\pi v)^p \hat{f}(v)$$

7. Dérivée fréquentielle : soit $g_p(t) = (-i2\pi t)^p f(t)$

$$\hat{g}_p(v) = \hat{f}^{(p)}(v)$$

8. Complexe conjuguée

$$\widehat{\bar{f}}(v) = \bar{\hat{f}}(-v)$$

9. Symétrie hermitienne

$$f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{f}(-v) = \bar{\hat{f}}(v)$$

Démonstration. On montre la propriété de convolution (1.), le point 2. s'en déduit directement. Soit $u(t) = (f * g)(t)$. On a

$$\begin{aligned} \hat{u}(v) &= \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i2\pi vt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t) e^{-i2\pi vt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau e^{-i2\pi vt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(x) e^{-i2\pi v(\tau + x)} d\tau dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i2\pi v\tau} d\tau \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i2\pi vx} dx \\ &= \hat{f}(v) \hat{g}(v) \end{aligned}$$

Les points 3, 4 et 5 se montrent par simple changement de variable.

La propriété de dérivée temporelle se fait en calculant la transformée de Fourier de la dérivée avec une intégration par partie suivie d'une récurrence immédiate, de façon similaire à la propriété de dérivation pour les coefficients des séries de Fourier. $\square$

L'analyse spectrale d'un signal se fait en général en regardant l'énergie dans le domaine de Fourier. La conservation de l'énergie est donnée par le théorème de Parseval :

2.3. Signaux stables et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps continu (TFTC)

Théorème 2.5 (Plancherel-Parseval)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Alors on a conservation de l'énergie :

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$$

ie.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu .$$

Soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{g}$ sa transformée de Fourier. Alors on a conservation du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

ie.

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu$$

Démonstration. On montre la conservation du produit scalaire, la conservation de l'énergie s'en déduit directement.

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Soit la fonction $\check{g}$ telle que $\check{g}(t) = \bar{g}(-t)$. On pose $u(t) = (f * \check{g})(t)$. Alors

$$\hat{u}(\nu) = \hat{f}(\nu) \hat{\check{g}}(\nu) = \hat{f}(\nu) \bar{\hat{g}}(\nu)$$

On a donc

$$u(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \bar{\hat{g}}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

et en particulier

$$u(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \bar{\hat{g}}(\nu) d\nu$$

Par construction de u à l'aide du produit de convolution, on a de plus

$$u(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \check{g}(\tau - t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{g}(t - \tau) dt$$

et en particulier

$$u(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{g}(t) dt$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.3 (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$)

La définition de la transformée de Fourier a été donnée pour les fonctions $L^1(\mathbb{R})$. Cette définition se généralise aux fonctions $L^2(\mathbb{R})$, mais l'inversion doit être prise au sens des intégrales généralisées.

Dans la pratique on s'intéressera à la *largeur de bande* des signaux et plus particulièrement aux signaux dits à *bande limitée*.

2. Traitement du signal analogique

Définition 2.19 (Largeur de bande)

Soit $s \in L^2(\mathbb{R})$ un signal analogique et $\hat{s}$ sa transformée de Fourier. $\text{supp}\{\hat{s}\}$ est appelé la *largeur de bande* du signal. Cela correspond à l'étendue des fréquences composant le signal. On parle aussi de *largeur de spectre*.

Définition 2.20 (Signal à bande limitée)

Soit $s \in L^2(\mathbb{R})$ un signal analogique et $\hat{s}$ sa transformée de Fourier. s est dit à bande limitée ssi il existe $B > 0$ tel que

$$\text{supp}\{\hat{s}\} \subset [-B, B] .$$

Un résultat pratique important en traitement du signal est le théorème de Paley-Wiener

Théorème 2.6 (Paley-Wiener)

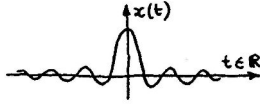
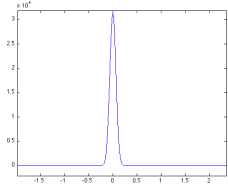
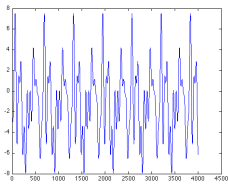
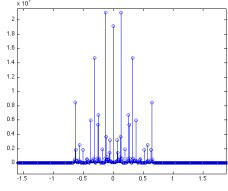
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction non nulle à support compact. Alors sa transformée de Fourier ne peut être nulle sur un intervalle. Inversement, si $\hat{f}$ est à support compact, alors f ne peut s'annuler sur un intervalle.

Ce théorème nous dit qu'un signal analogique ne peut être à la fois à bande limitée et à support temporel limité!

2.4. Récapitulatif : Fourier analogique

On a vu deux types de transformées de Fourier. Au final, toutes ces transformées sont assez semblables, avec des formules adéquates pour l'inversion, ou encore la conservation de l'énergie. On insiste ici sur les *différences* pratiques, suivant qu'on choisisse un modèle plutôt qu'un autre.

2.5. Filtrage analogique

signal temporel	transformée de Fourier
$s \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (signal analogique stable d'énergie finie)	$\hat{s} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ (fonction continue)
 $s(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(v) e^{i2\pi vt} dv$	 $\hat{s}(v) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-i2\pi vt} dt$
$s \in L^2([0, T])$ (signal analogique périodique)	$\hat{s} = \{c_n(s)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (suite numérique d'énergie finie)
 $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(s) e^{i \frac{2\pi}{T} nt}$	 $c_n(s) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt$

2.5. Filtrage analogique

2.5.1. Un outil d'analyse : la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une sorte de généralisation de la transformée de Fourier. Elle est basée sur l'utilisation des signaux propres des filtres $t \mapsto e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$.

Définition 2.21 (Transformée de Laplace bilatérale)

Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Quand elle existe, la transformée de Laplace de x est donnée par :

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad p = \sigma + i\omega.$$

Cette intégrale converge dans une bande du plan complexe $B(\sigma_1, \sigma_2)$ limitée par deux droites parallèles à l'axe imaginaire et d'abscisses σ_1 et σ_2 .

Remarque 2.4 (Lien avec la transformée de Laplace unilatérale)

On peut écrire la transformée de Laplace bilatérale comme :

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-pt} dt + \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \\ &= X_-(p) + X_+(p). \end{aligned}$$

2. Traitement du signal analogique

La partie $X_+(p)$ est en général appelée transformée de Laplace (unilatérale). Elle est équivalente à la transformée de Laplace bilatérale pour les signaux causaux. On considère dans ce cours la transformée de Laplace bilatérale.

Avec $p = \sigma + i\omega$, et en posant $\omega = 2\pi\nu$, la transformée de Laplace peut être vue comme la transformée de Fourier de la fonction $y(t) = x(t)e^{-\sigma t}$:

$$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-i2\pi\nu t} dt = \hat{y}(\nu).$$

Deux fonctions peuvent avoir la même transformée de Laplace. La différence se fait alors par la région de convergence de leur transformée notée $\mathcal{R}(p)$.

Exemple 2.1

1. Soit $x(t) = \theta(t)e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$X(p) = \int_{\mathbb{R}} \theta(t)e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{a+p}, \mathcal{R}(p) = \sigma > -a$$

2. Soit $x(t) = \theta(-t)e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$X(p) = \int_{\mathbb{R}} \theta(-t)e^{-at} e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(a+p)t} dt = \frac{1}{a+p}, \mathcal{R}(p) = \sigma < -a$$

L'inversion de la transformée de Laplace s'obtient en appliquant le théorème de Dirichlet (inversion de la transformée de Fourier) à $f(t)e^{-\sigma t}$.

Définition 2.22

(Transformée de Laplace inverse)

Soit f une fonction admettant pour transformée de Laplace $\mathcal{L}_f$.

$$x(t) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\sigma^+ - i\infty}^{\sigma^- + i\infty} X(p)e^{pt} dp$$

Pour déterminer la région de convergence d'une transformée de Laplace, il suffit de déterminer $\sigma^+ = \inf\{\sigma, \mathcal{L}_{f^+}(p), p = \sigma + i\omega < +\infty\}$ et $\sigma^- = \sup\{\sigma, \mathcal{L}_{f^-}(p), p = \sigma + i\omega < +\infty\}$. La région de convergence est alors $R(p) =]\sigma^+, \sigma^-[$.

Proposition 2.7

(Transformée de Laplace et causalité)

Soit x une fonction ayant pour transformée de Laplace $X(p)$.

- Si x est causale, alors la région de convergence de $X(p)$ est de la forme $R(p) = \sigma > \sigma^+$. De plus $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} |X(p)| = 0$.
- Si x est anti-causale, alors la région de convergence de $X(p)$ est de la forme $R(p) = \sigma < \sigma^-$. De plus $\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} |X(p)| = 0$.

Proposition 2.8

(Propriétés)

Soit x une fonction ayant pour transformée de Laplace $X(p)$ et $R(p) =]\sigma^+, \sigma^-[$.

- La transformée de Laplace est linéaire.

- Translation : soit $y(t) = x(t - t_0)$ $Y(p) = e^{-pt_0} X(p)$
- Modulation : soit $y(t) = e^{pt} x(t)$ $Y(p) = X(p - p_0)$
- Changement d'échelle : soit $y(t) = x(at)$ $Y(p) = \frac{1}{a} X\left(\frac{p}{a}\right)$ et $R(p) =]a\sigma^+, a\sigma^-[$
- Dérivation : soit $y(t) = x'(t)$ $Y(p) = pX(p)$
- Intégration : soit $y(t) = \int_a^t x(u) du$, a quelconque $\underline{Y}(p) = \frac{1}{p} X(p)$ et $R =]\sigma^+, \sigma^- [\cup]0, +\infty[$
- Convolution : soit $y(t) = (h * x)(t)$ avec h une fonction ayant pour transformée de Laplace $H(p)$ et $R_h(p) =]\tilde{\sigma}^+, \tilde{\sigma}^-]$. $Y(p) = H(p)X(p)$ et $R =]\max(\tilde{\sigma}^+, \sigma^+), \min(\tilde{\sigma}^-, \sigma^-)[$
- Lien avec la TFC : $\hat{x}(\nu) = X(i2\pi\nu)$ seulement si $1 \in \mathcal{R}(p)$! Sinon la TFC n'est pas définie.

Théorème 2.7 (Valeur initiale)

Soit $x(t)$ un signal causal et $X(p)$ sa transformée de Laplace. Alors, quand les limites existent,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma X(p) .$$

Théorème 2.8 (Valeur finale)

Soit $x(t)$ un signal causal et $X(p)$ sa transformée de Laplace. Alors, quand les limites existent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma X(p) .$$

$f(t)$	$\mathcal{L}_f(p)$	R
$\delta(t)$	1	$\mathbb{C}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{p}$	$\sigma > 0$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\sigma > 0$
$e^{-at}\theta(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$\sigma > \operatorname{Re}(a)$
$\sin(\omega t)\theta(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sigma > 0$
$\cos(\omega t)\theta(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\sigma > 0$

TABLE 2.1. – Transformées de Laplace usuelles

2.5.2. Rappels et définitions

On a vu dans la section 2.2 (et plus particulièrement la sous-section 2.2.3 qu'un filtre est système linéaire et invariant dans le temps, et qu'on peut l'écrire comme

2. Traitement du signal analogique

une convolution avec sa réponse impulsionnelle, cette dernière le caractérisant parfaitement (on confondra souvent par la suite un filtre avec sa réponse impulsionnelle). Un filtre pourra se caractériser aussi par sa fonction de transfert ou son gain complexe.

Définition 2.23 (Réponse impulsionnelle)

Soit un filtre $\mathcal{S}$ continu. La réponse impulsionnelle d'un filtre est sa réponse à l'impulsion unité. C'est-à-dire $\mathcal{S}(\delta_t) = h_t$. Ainsi, pour tout signal analogique f , $\mathcal{S}(f)(t) = h * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f[t-x]h[x] dx$

Définition 2.24 (Fonction de transfert)

Soit $\mathcal{S}$ un filtre à temps continue. La fonction de transfert du filtre est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle. Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, on la note en général $H(p)$.

Définition 2.25 (Réponse en fréquence ou gain complexe)

C'est la restriction de la fonction de transfert à l'axe imaginaire en temps continue. Cela correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (lorsque qu'elle converge). On la note en général $G(v)$.

La réponse en fréquence d'un filtre donne un sens essentiel à la notion de filtrage. En effet, notons h la réponse impulsionnelle d'un filtre. On a vu que la réponse en sortie $v(t)$ d'un filtre s'obtient par définition comme la convolution de l'entrée $u(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$v(t) = h * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)u(t-x) dx. \quad (2.6)$$

Si l'on prend la transformée de Fourier de l'équation précédente, on trouve :

$$\hat{v}(v) = \hat{h}(v)\hat{u}(v).$$

On voit donc clairement qu'une opération de filtrage permet d'agir directement sur le contenu fréquentiel d'un signal : certaines fréquences vont être atténuées (voire annulées) et d'autres vont être renforcées. La valeur critique d'une fréquence qui annule les fréquences d'un signal est appelée *fréquence de coupure* (voir plus bas).

Les signaux "exponentielles complexes" jouent un rôle particulier pour les filtres à temps continu, car ce sont les *signaux propres*. En effet, appliquons l'excitation $t \mapsto x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ au filtre $\mathcal{S}$ de réponse impulsionnelle h :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x(t)) &= \mathcal{S}(e^{st}) = \int_{\mathbb{R}} h(t-\theta)e^{s\theta} d\theta \\ &= e^{st} \int_{\mathbb{R}} h(u)e^{-su} du \\ &= H(s)e^{st} = H(s)x(t) \end{aligned}$$

avec $H(s) = \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-su} du$ la valeur propre associée au signal propre $t \mapsto e^{st}$.

2.5.3. Exemple : le filtre RC

Prenons pour exemple le filtre RC de la figure 2.5.3.

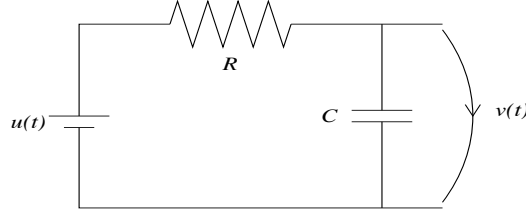


FIGURE 2.9. – Filtre RC.

La tension $v(t)$ aux bornes du condensateur est donnée par l'équation différentielle :

$$RC v'(t) + v(t) = u(t) , \quad (2.7)$$

qui a pour solution

$$v(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-s)}{RC}} u(s) ds . \quad (2.8)$$

Le système est clairement linéaire : cela se voit dès l'équation différentielle (2.7), étant donné que l'opérateur de dérivation est linéaire. La linéarité se voit donc aussi dans la solution (2.8) avec la linéarité de l'intégrale.

Montrons que de plus, on a bien affaire à un filtre. Il suffit pour cela d'exprimer la sortie $v(t)$ comme une convolution de l'entrée $u(t)$. En posant

$$h(t) = \frac{1}{RC} \Theta(t) e^{-\frac{t}{RC}} ,$$

où Θ est la fonction de Heaviside. On vérifie immédiatement que

$$v(t) = h * u(t) .$$

Ce résultat se retrouve en utilisant la transformée de Laplace et ses propriétés. La transformée de Laplace de (2.7) s'écrit :

$$pV(p) + \frac{1}{RC} V(p) = \frac{1}{RC} U(p) ,$$

avec un domaine de convergence de type $p \in]\sigma, +\infty[$, $\sigma \in \mathbb{R}$, le système étant clairement causal. On obtient donc

$$V(p) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + p} U(p) .$$

2. Traitement du signal analogique

On identifie alors la transformée de Laplace H de la réponse impulsionnelle du filtre :

$$H(p) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + p},$$

qu'il suffit d'inverser pour obtenir la réponse impulsionnelle du filtre RC :

$$h(t) = \frac{1}{RC} \Theta(t) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

2.5.4. Filtres idéaux

Les filtres idéaux sont des filtres qui permettent d'annuler parfaitement certaines fréquences des signaux à partir d'une fréquence de coupure donnée. On présente les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande idéaux.

Filtre passe-bas

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bas idéal est donnée par

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < \nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

où ν_0 est la *fréquence de coupure* du filtre : toutes les composantes haute fréquence (au delà de la fréquence de coupure) d'un signal filtré par un passe-bas idéal sont annulées.

On peut alors chercher à exprimer la réponse impulsionnelle de ce filtre. Il suffit pour cela d'inverser sa transformée de Fourier (2.9). On montre alors que

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi\nu_0 t)}{\pi t}.$$

On remarque immédiatement que ce filtre *n'est pas causal* ! Il n'est donc pas réalisable et ne peut pas être mis en œuvre sur un circuit analogique.

Filtre passe-haut

La réponse en fréquence d'un filtre passe-haut idéal est donnée par

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| > \nu_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

où ν_0 est la *fréquence de coupure* du filtre : toutes les composantes basse fréquence (au dessous de la fréquence de coupure) d'un signal filtré par un passe-haut idéal sont annulées.

Filtre passe-bande

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bande idéal est donnée par

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_0 < |\nu| < \nu_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

où ν_0 et ν_1 sont les *fréquences de coupure* du filtre : toutes les composantes basse fréquence au dessous de la fréquence de coupure ν_0 , et hautes fréquences au dessus de la fréquence de coupure ν_1 d'un signal filtré par un passe-bande idéal sont annulées.

Filtre coupe-bande

La réponse en fréquence d'un filtre passe-bande idéal est donnée par

$$\hat{h}(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu_0 < |\nu| < \nu_1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

où ν_0 et ν_1 sont les *fréquences de coupure* du filtre : seules les composantes basse fréquence au dessous de la fréquence de coupure ν_0 , et hautes fréquences au dessus de la fréquence de coupure ν_1 d'un signal filtré par un passe-bande idéal sont conservées. Ce filtre est "l'inverse" du filtre précédent.

Tout comme le filtre passe-basse idéal, les filtres passe-haut, passe-bande et coupe bande ne sont pas réalisables. Il faudra en pratique se contenter d'une approximation par des filtres analogiques.

2.5.5. Filtres dynamiques continus

L'exemple du filtre RC peut se généraliser à des filtres gouvernés par une équation différentielle de la forme :

$$a_0 v(t) + a_1 v'(t) + a_2 v''(t) + \dots + a_N v^{(N)}(t) = b_0 u(t) + b_1 u'(t) + b_2 u''(t) + \dots + b_M u^{(M)}(t)$$

où les a_i, b_j sont des constantes. La transformée de Laplace d'une telle équation donne :

$$a_0 V(p) + a_1 p V(p) + a_2 p^2 V(p) + \dots + a_N p^N V(p) = b_0 U(p) + b_1 p U(p) + b_2 p^2 U(p) + \dots + b_M p^M U(p)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_M p^M}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_N p^N} U(p) \\ &= H(p) U(p) \end{aligned}$$

2. Traitement du signal analogique

La fonction de transfert $H(p)$ d'un tel filtre est donc une fraction rationnelle (i.e. le quotient de deux polynômes) que l'on peut factoriser comme :

$$H(p) = C \frac{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_M)}{(p - q_1)(p - q_2) \dots (p - q_N)},$$

où les $p_1, \dots, p_M$ sont les racines du numérateur et les $q_1, \dots, q_N$ sont les racines du dénominateur (ie, les pôles de la fraction rationnelle).

Afin de synthétiser des filtres, il suffit donc *a priori* de se donner une fraction rationnelle. Encore faut-il que le filtre soit réalisable. Ceci impose des contraintes sur les racines du dénominateur données par le théorème suivant

Théorème 2.9

Soit un filtre de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{n(p)}{d(p)}$$

où le numérateur n et le dénominateur p sont deux polynômes tels que $\deg(n) \leq \deg(d)$. Le filtre est réalisable si et seulement si les racines $q_1, \dots, q_M$ du dénominateur d ont une partie réelle négative.

En pratique, on commence par se donner un candidat pour $\left| \frac{n(iv)}{d(iv)} \right|^2$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes $\frac{\mathcal{N}(iv)}{\mathcal{D}(iv)}$. Sous les hypothèses appropriées, il est possible de s'assurer qu'un tel quotient est en effet le module carré de la fonction de transfert d'un filtre réalisable. Plus précisément

Théorème 2.10

Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ deux polynômes à coefficients réels positifs et pairs. Alors il existe deux polynômes n et d tels que l'on ait

$$\frac{\mathcal{N}(iv)}{\mathcal{D}(iv)} = \left| \frac{n(iv)}{d(iv)} \right|^2.$$

De plus, d peut être choisi de sorte que le filtre de réponse en fréquence $\frac{n(iv)}{d(iv)}$ soit réalisable.

3 ■ Traitement du signal numérique

3.1. Introduction : signaux et systèmes numériques

Les signaux numériques sont obtenus à partir des signaux analogiques par échantillonnage et quantification. Ces signaux ont une importance particulière car ce sont ceux-là qui pourront être manipulés sur un ordinateur. Ils sont modélisés en mathématiques par des suites à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}s &: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k &\mapsto s[k] = s_k .\end{aligned}$$

3.1.1. Définitions

On adapte les définitions données pour les signaux analogique directement.

Définition 3.1 (Signal numérique causal)

Un signal causal est un signal qui débute à une date $k = 0$. Plus précisément, soit $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un signal numérique. s est un signal causal ssi

$$s_k = 0 \text{ pour } k < 0 .$$

Définition 3.2 (Signal numérique stable)

Soit $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un signal numérique. On dira que s est stable si $s \in \ell^1(\mathbb{Z})$, ie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s_k| < +\infty .$$

Définition 3.3 (Énergie d'un signal numérique)

Soit $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un signal numérique. L'énergie d'un signal est sa norme 2 élevée au

3. Traitement du signal numérique

carré $\|s\|_2^2$:

$$\|s\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2.$$

Définition 3.4 (Signal numérique à énergie finie)

Soit $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un signal numérique. s est à énergie finie s'il est dans ℓ^2 , ie sa norme 2 est bornée :

$$\|s\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 < +\infty.$$

Définition 3.5 (Signal numérique réalisable)

Soit $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un signal numérique. s est dit réalisable s'il est à la fois stable et causal.

On rencontrera généralement deux types de signaux numériques :

- des signaux à temps infini (en général non causaux), ie. des suites $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définies sur tout $\mathbb{Z}$.
- des signaux à temps fini (souvent causaux), ie. des suites $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ ayant un support fini.

Définition 3.6 (Signal à support fini)

Soit $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ un signal numérique. s est dit à support fini si

$$\text{supp}(s) = \{k, s_k \neq 0\} \text{ est un ensemble fini.}$$

3.1.2. Signaux élémentaires

On présente ici quelques signaux élémentaires rencontrés fréquemment en traitement du signal. On donne la définition discrète et continue pour chaque signal.

Impulsion de Dirac

On rappelle ici les signaux élémentaires vus dans le cadre analogique à la section 2.2.2 du chapitre 2.

Définition 3.7 (Impulsion de Dirac discrète)

L'impulsion de Dirac, notée δ_k , est la suite définie par :

$$\delta_k[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation de l'impulsion de Dirac est donnée sur la figure 2.2.2.

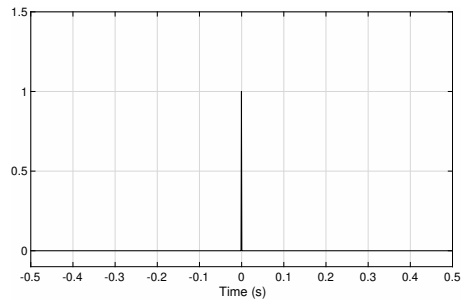


FIGURE 3.1. – Impulsion de Dirac δ_0 .

Signal échelon (Heaviside)

Une autre fonction élémentaire est la fonction de Heaviside, aussi appelée fonction échelon ou marche.

Définition 3.8 (Suite de Heaviside)

La suite de Heaviside est la suite notée Θ définie par

$$\Theta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une représentation de la fonction de Heaviside est donnée sur la figure 2.2.2.

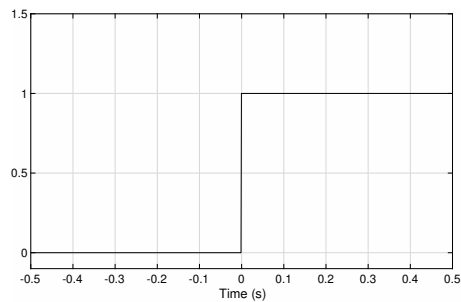


FIGURE 3.2. – Fonction de Heaviside.

Signal porte

Le signal porte servira essentiellement lors des opérations de filtrage dans le domaine fréquentiel. Il est représenté sur la figure 2.2.2.

3. Traitement du signal numérique

Définition 3.9 (Signal porte)

La suite numérique du signal porte est la suite définie par

$$\Pi_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

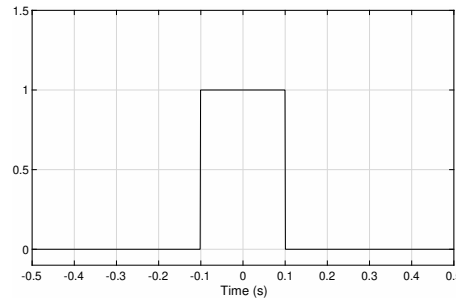


FIGURE 3.3. – Fonction porte.

3.1.3. Systèmes numériques

On adapte directement toutes les notions vu dans la section 2.2.3 du chapitre 2 sur le traitement du signal analogique. On rappelle le schéma général d'un système :

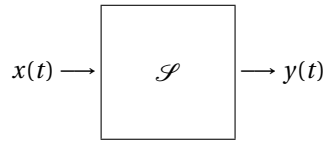


FIGURE 3.4. – Schéma d'un système.

On donne la définition d'un système linéaire à temps discret

Définition 3.10 (Système linéaire à temps discret)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de signaux à temps discret. Un système $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est linéaire s'il existe une suite $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$y_k = \mathcal{S}(x_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k,n} x_n .$$

Un système linéaire invariant dans le temps est simplement un système linéaire qui peut s'écrire comme une convolution et s'appelle alors un *filtre*.

Définition 3.11 (Filtre à temps discret)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de signaux à temps discret. Un système linéaire $\mathcal{S} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est invariant dans le temps s'il existe une suite $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$y_k = \mathcal{S}(x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k-n} x_n = h * x.$$

On appelle un tel système un filtre à temps discret de réponse impulsionnelle h

Comme pour le cas analogique, si on applique l'impulsion numérique de Dirac comme excitation à l'entrée du filtre numérique, on retrouve bien $y = h$ comme réponse en sortie.

Ici encore, un filtre causal est un système qui "ne dépend pas du futur", et qui est donc possiblement implémentable en temps réel en pratique.

Définition 3.12 (Filtre causal)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h (à temps discret ou continu). Le filtre est dit causal si h est un signal causal (cf. définition 2.4)

Ainsi, pour un filtre causal de réponse impulsionnelle h , l'opération de filtrage (qui est une convolution) d'un signal x s'écrit

$$\begin{aligned} y[t] &= (h * x)[t] \\ &= \sum_{\tau} x[\tau] h[t - \tau] = \sum_{\tau} h[\tau] x[t - \tau] \\ &= \sum_{\tau=0}^{+\infty} h[\tau] x[t - \tau]. \end{aligned}$$

Ainsi, pour calculer le signal filtré y pour l'échantillon t , seule la connaissance du "passé" du signal x est nécessaire. En effet, dans l'opération ci-dessus, seuls les $x[\tau]$ pour $\tau \leq t$ interviennent dans le calcul. Il y a donc bien ici encore une relation de "cause à effet".

Pour les filtres numériques, la notion de "filtre réalisable" est directement liée à la notion de "réalisable en temps réel" (ou plutôt, compatible avec la notion de temps réel, en supposant une capacité de calcul possiblement infinie) Tout comme pour les système analogique, la causalité n'est pas suffisante pour pouvoir réaliser un filtre en pratique. On adapte la notion de stabilité pour les filtres numériques

Définition 3.13 (Filtre stable)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h . Le filtre est dit stable si h est un signal stable (cf. définitions 2.6).

On peut alors définir un filtre numérique réalisable :

Définition 3.14 (Filtre réalisable)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h . Le filtre est dit réalisable s'il est stable et causal.

3.2. Échantillonnage

Une grande majorité des signaux auxquels le traiteur de signal est confronté ont une origine physique (voix, image, signaux géophysiques...) et sont donc analogiques. Afin de les traiter numériquement, la conversion analogique/numérique doit se faire le plus fidèlement possible en contrôlant la perte d'information et l'ajout de "bruit". On présente ici le théorème fondamentale de l'échantillonnage.

3.2.1. Théorème d'échantillonnage

Bien qu'on présente une version "moderne" de l'échantillonnage tel que présenté par Shannon, Nyquist, Whittaker et Kotelnikov, qui ont étudié le problème dans la 1ère moitié du XXème siècle, les mathématiciens, comme Cauchy, se sont rapidement posé la question d'approcher une fonction continue par une suite numérique.

Le théorème d'échantillonnage se formule dans le cadre des signaux à *bande limitée*.

Définition 3.15 (Espace de Paley-Wiener)

On appelle espace de Paley-Wiener, l'espace de signaux d'énergie finie à bande limitée :

$$PW_{\nu_0} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(\nu) = 0 \forall \nu \notin [-\nu_0, \nu_0]\}.$$

On peut formuler le théorème d'échantillonnage de plusieurs façon (bien entendu équivalentes). On donne une première version "générale" de ce théorème, généralement suffisante pour l'ingénieur ou le physicien, suivie d'une version mathématiquement plus précise.

Théorème 3.1 (Échantillonnage)

Soit $s \in L^2(\mathbb{R})$ un signal analogique à bande limitée dans l'intervalle de fréquence $\nu \in [-\nu_0, \nu_0]$. Alors s peut être reconstruit (ie, interpolé) sans erreur à partir de ses échantillons $s(t_n)$ prélevés aux instants $t_n = \frac{n}{2\nu_0} = nT_e$.

On donne les éléments de preuves ci-après

Démonstration. La transformée de Fourier $\hat{s}$ de s étant à support limité, on peut la développer en série de Fourier après périodisation :

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\hat{s}) \mathbb{1}_{[-\nu_0, \nu_0]} e^{-i2\pi \frac{n}{2\nu_0} \nu}, \quad (3.1)$$

3.2. Échantillonnage

avec les coefficients de Fourier donnés par

$$c_n(\hat{s}) = \frac{1}{2\nu_0} \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi \frac{n}{2\nu_0} \nu} d\nu.$$

Or, la transformée de Fourier inverse de s aux instant $t_n = \frac{n}{2\nu_0}$ est donnée par :

$$s(t_n) = \int_{-\nu_0}^{\nu_0} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi t_n \nu} d\nu,$$

et donc

$$c_n(\hat{s}) = Ts(t_n). \quad (3.2)$$

En réinjectant (3.2) dans (3.1), on a

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ts(t_n) \mathbb{1}_{[-\nu_0, \nu_0]} e^{-i2\pi \frac{n}{2\nu_0} \nu},$$

puis en inversant la transformée de Fourier, on obtient

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \text{sinc}(2\nu_0(t - t_n)),$$

avec $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$. □

La fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{2\nu_0}$ est une fréquence limite : il est tout à fait possible d'échantillonner le signal à une fréquence plus élevée (et donc, augmenter le nombre d'échantillons). Par contre, une fréquence d'échantillonnage inférieur interdit (en général) une reconstruction exacte du signal.

Théorème 3.2 (Échantillonnage)

Soit $s \in PW_{\omega_0}$. Soit $\eta = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage telle que $s_n = s(t_n) = s(\frac{n}{\eta}) = s(n.T_e)$. On considère la suite des échantillons s_n . Alors

1. *Sous-échantillonnage* : Si $\eta < 2\nu_0$, la suite des échantillons $\{s_n\}$ ne permet pas de déterminer le signal s sans hypothèse supplémentaire.
2. *Sur-échantillonnage* : Si $\eta > 2\nu_0$, alors il existe une infinité de formules de reconstruction de s à partir des échantillons. Soit ϕ telle que $\hat{\phi} \in C^\infty$, $\hat{\phi}(\nu) = 0$ pour tout $\nu \notin [-\eta, \eta]$ et $\hat{\phi}(\nu) = 1$ pour tout $\nu \in [-\nu_0, \nu_0]$. Alors on a

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \frac{1}{\eta} \phi\left(t - \frac{n}{\eta}\right).$$

3. Si $\eta = 2\nu_0$, alors il existe une unique formule de reconstruction de s à par-

3. Traitement du signal numérique

tir de ses échantillons :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \text{sinc}(2\nu_0(t - t_n)) .$$

Dans le cas critique $\eta = 2\nu_0$ on a de plus la formule de Parseval :

Théorème 3.3 (Parseval)

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(t_n)|^2 .$$

On a pu voir dans la démonstration qu'au final, la transformée de Fourier du signal analogique est complètement caractérisé par la transformée discrète du signal numérique.

Théorème 3.4

Soit $s \in PW_{\nu_0}$. On a

$$\hat{s}(\nu) = \mathbb{1}_{[-\nu_0, \nu_0]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) e^{-it_n 2\pi \nu}$$

avec $t_n = \frac{n}{2\nu_0}$.

On peut remarquer que la position des échantillons n'a aucune importance, seule la fréquence d'échantillonnage intervient dans le théorème. De plus, ce théorème peut s'adapter si la bande passante n'est pas centrée à l'origine, on a alors une version haute-fréquence du théorème d'échantillonnage.

3.2.2. L'échantillonnage en pratique

Le théorème précédent s'applique aux signaux à bande limité. Or, on a vu précédemment qu'un signal ne pouvait être à la fois à bande limité et à support limité en temps (hormis le signal nul). Pourtant, en pratique (imaginons une conversation téléphonique), le signal analogique est fini en temps (même pour une personne très bavarde). Cette section expose donc les problèmes pratiques de l'échantillonnage d'un signal.

3.2.2.1. Repliement spectral

L'échantillonnage est directement lié à l'emploi de la distribution peigne (le peigne de Dirac) :

$$\delta_T = \sum_n \delta(t - nT) = \sum_n \delta(t - \frac{n}{2\nu_0}) .$$

En effet, on peut associer à tout signal numérique $\{s_n = s(t_n)\}$, $t_n = \frac{n}{2\nu_0} = nT$, le signal continue :

$$s_c(t) = \sum_n s_n \delta(t - t_n) .$$

Ce signal admet comme transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
 \hat{s}_c(v) &= \widehat{s(t)\delta_T(t)} \\
 &= \hat{s} * \frac{1}{T} \delta_{\frac{1}{T}}(t) \\
 &= 2v_0 \sum_n \hat{s}(v - 2nv_0) .
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

On remarque alors que si s est effectivement à bande limitée dans $[-v_0, v_0]$, les termes de la série (3.3) sont nuls pour $|v| < v_0$ dès que $n \neq 0$. On peut donc retrouver exactement s par un filtrage passe-bas idéal de $s_s(t)$ avec un filtre de fonction de transfert $H = \frac{1}{2v_0} \mathbb{1}_{[-v_0, v_0]}$. Cependant, ce filtre passe-bas n'est pas réalisable, car sa réponse impulsionnelle est un sinus cardinal et n'est donc pas causale. En ce sens, la reconstruction de $s(t)$ à partir de ses échantillons est seulement possible en théorie.

Il faut remarquer que dès qu'un signal est échantillonné, et ce quelque soit la fréquence d'échantillonnage et l'emplacement des échantillons, sa transformée de Fourier est périodique et réciproquement. Par conséquent, si s n'est pas à bande limitée, il y a *repliement spectral* du "motif de base" $\hat{s}(v)$ pour former la transformée de Fourier $\hat{s}_c$ (qui est périodique).

En pratique, le pas d'échantillonnage T_e est souvent imposé par des contraintes physiques, de calcul, ou de mémoire et la bande passante du signal n'est pas inclus dans $[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]$. La transformée de Fourier du signal s ne peut alors plus être déduite de la transformée de Fourier du signal s_c donné par les échantillons. Les hautes fréquences du signal viennent en effet perturber les fréquences les plus basses et la transformée de Fourier de s_c peut être complètement différente de celle de s sur $[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]$. Ce phénomène de repliement spectral est aussi appelé *aliasing*. Le signal reconstruit peut alors être très éloigné du signal original.

Ce phénomène d'aliasing s'observe facilement dans les films : la rotation rapide des roues d'une voiture pour le nombre d'image par seconde donne l'impression d'une roue qui tourne trop lentement, voire à l'envers.

3.2.2.2. Signaux à temps limité et à bande limitée

Comment supprimer ce phénomène d'aliasing? De plus, les signaux utilisés en pratique étant à support temporel limité et donc n'étant pas à bande limitée, comment utiliser le théorème d'échantillonnage en pratique? Supposons qu'on veuille échantillonner un signal s avec un pas de temps imposé de T_e .

Afin d'utiliser le théorème d'échantillonnage, il faut approcher le spectre de s par une transformée de Fourier à support dans $[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]$. Notons $\tilde{s}$ cette transformée de Fourier et $\tilde{s}$ le signal obtenu par inversion. Le théorème de Parseval nous

3. Traitement du signal numérique

donne :

$$\begin{aligned}\|s - \hat{s}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{s}(v) - \tilde{\hat{s}}(v)|^2 dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|v| > \frac{1}{T_e}} |\hat{s}(v) - \tilde{\hat{s}}(v)|^2 dv + \frac{1}{2\pi} \int_{|v| < \frac{1}{T_e}} |\hat{s}(v) - \tilde{\hat{s}}(v)|^2 dv.\end{aligned}$$

et la distance $\|s - \hat{s}\|_2^2$ est donc minimale lorsque la seconde intégrale est nulle, c'est-à-dire :

$$\tilde{\hat{s}} = \hat{s} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{T_e}, \frac{1}{T_e}]}.$$

Le filtrage passe-bas idéal évite alors l'aliasing en supprimant toutes les fréquences supérieures à $\frac{1}{T_e}$. Le signal $\tilde{s}$ pourra être construit à partir des échantillons du signal s qu'on aura préalablement filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\frac{1}{T}$.

3.3. Signaux stable et/ou à énergie finie : transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

La section 2.3 du chapitre 2 a introduit l'analyse de Fourier dans le cas des signaux analogiques. Les outils informatiques aidant, la majorité des signaux sont traités numériquement. Cette section adapte donc l'analyse de Fourier pour les signaux numériques.

On commence par introduire l'analyse de Fourier pour les suites numériques $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Une façon pratique de passer de l'analyse continue à l'analyse discrète, est l'utilisation d'un peigne de Dirac. On peut en effet associer au signal discret $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un signal à temps continu (en fait, une distribution) :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n \delta(t - n).$$

On peut très facilement définir la transformée de Fourier pour les distributions en reprenant le travail précédent. On en déduit alors la définition suivante, ainsi que toutes les propriétés et résultats déjà démontrés.

Définition 3.16 (Transformée de Fourier discrète)

Soit $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La transformée de Fourier discrète de $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est la fonction 1-périodique de la variable *continue* :

$$\hat{s}(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i2\pi n v}.$$

Cette fonction est une **fonction périodique de période 1**. Cette transformée est inversible, et l'on retrouve le signal original par le théorème suivant

Théorème 3.5 (Inversion de la TFTD)

Soit $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\hat{s}$ sa transformée de Fourier. Alors

$$s_n = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi n\nu} d\nu.$$

Lorsque le signal est à énergie fini, on dispose toujours de la formule de Plancherel-Parseval.

Théorème 3.6 (Plancherel-Parseval)

Soit $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $\hat{s}$ sa transformée de Fourier. Alors

$$\|s\|_2^2 = \|\hat{s}\|_2^2$$

ie.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu.$$

Tout comme pour la transformée de Fourier continue, la transformée de Fourier discrète possède les mêmes propriétés utiles de calcul (en particulier, la convolution dans le domaine temporel devient une multiplication dans le domaine fréquentiel).

3.4. Filtrage numérique

3.4.1. Un outil d'analyse : la transformées en z

Définition 3.17 (Transformée en z)

Soit $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un signal numérique. Sa transformée en z est la série

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

définie dans la couronne de convergence $r_1 < |z| < r_2$.

Définition 3.18 (Rayon de convergence)

Le rayon de convergence ρ de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est définie par

$$\rho = \sup \left\{ |z|, z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

et on a le lemme

3. Traitement du signal numérique

Lemme 3.1 (Rayon de convergence)

Le rayon de convergence ρ de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Et donc la couronne de convergence de S est donnée par

$$r_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |s_n|^{1/n} \quad \frac{1}{r_2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |s_{-n}|^{1/n}$$

Théorème 3.7 (Causalité et disque de convergence)

Un signal s est causal si sa transformée en z est définie à l'extérieur d'un disque de rayon r_1 , ie si $r_2 = +\infty$. De même s est anticausal si $r_1 = 0$, ie. si $S(z)$ est définie à l'intérieur du disque de rayon r_2 .

Théorème 3.8 (Stabilité)

Soit $x[n]$ un signal numérique et $X(z)$ sa transformée en z définie sur la couronne de convergence $r_1 < |z| < r_2$. x est stable ssi le disque unité appartient à la couronne de convergence, i.e. $X(z)$ est définie pour tout z tel que $|z| = 1$.

Démonstration. Un signal numérique x est stable ssi il admet une transformée de Fourier $\hat{x}$. La transformée de Fourier existe ssi

$$\hat{x}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-i2\pi \nu n} = X(e^{i2\pi \nu})$$

existe. □

Proposition 3.1 (Propriétés de calculs)

Soit x un signal numérique et $X(z)$ sa transformée en z .

- La transformée en z est linéaire
- Translation : soit $y[n] = x[n - k]$, alors $Y(z) = z^{-k} X(z)$
- Changement d'échelle : soit $y[n] = a^n x[n]$, alors $\underline{Y}(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$
- Dérivation : soit $y[n] = n^k x[n]$, alors $Y(z) = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^k X(z)$
- Convolution : soit $y[n] = (h * x)[n]$, alors $\underline{Y}(z) = H(z) X(z)$
- Lien avec la TFD $\hat{u}(\nu) = U(e^{i2\pi \nu})$ seulement si $r_1 < 1 < r_2$! Sinon la TFD n'est pas définie.

Théorème 3.9 (Valeur initiale)

Soit $x = \{x_n\}$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée en z . Alors

$$x_0 = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) .$$

Théorème 3.10 (Valeur finale)

Soit $x = \{x_n\}$ un signal causal et $X(z)$ sa transformée en z . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z) .$$

x_n	$X(z)$	R
δ_n	1	$\mathbb{C}$
$\theta[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$n\theta[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$a^n\theta[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$na^n\theta[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-a^n\theta[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$-na^n\theta[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n)\theta[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n)\theta[n]$	$\frac{1-z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$ z > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)\theta[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$ z > a $
$a^n\sin(\omega_0 n)\theta[n]$	$\frac{1-az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$ z > a $

TABLE 3.1. – Transformées en z usuelles**3.4.2. Filtrage : rappels et définitions**

On a vu dans la section 3.1 qu'un filtre est système linéaire et invariant dans le temps, et qu'on peut l'écrire comme une convolution avec sa réponse impulsionnelle, cette dernière le caractérisant parfaitement (on confondra souvent par la suite un filtre avec sa réponse impulsionnelle). Un filtre pourra se caractériser aussi par sa fonction de transfert ou son gain complexe.

Définition 3.19 (Réponse impulsionnelle)

Soit un filtre $\mathcal{S}$ discret. La réponse impulsionnelle d'un filtre est sa réponse à

3. Traitement du signal numérique

l'impulsion unité $\mathcal{S}(\delta_t) = h_t$. Ainsi, pour tout signal numérique x

$$\mathcal{S}(x)[k] = h * x[k] = \sum_n x[k-n]h[n]$$

Définition 3.20 (Fonction de transfert)

La fonction de transfert d'un filtre numérique est la transformée en z de sa réponse impulsionnelle. Pour un filtre de réponse impulsionnelle h_n , on la note en général $H(z)$.

Définition 3.21 (Réponse en fréquence ou gain complexe)

C'est la restriction de la fonction de transfert au cercle unité en temps discret. Cela correspond à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (lorsqu'elle converge). On la note en général $G(v)$.

La réponse en fréquence d'un filtre donne un sens essentiel à la notion de filtrage. En effet, notons h la réponse impulsionnelle d'un filtre. On a vu que la réponse en sortie v d'un filtre s'obtient par définition comme la convolution de l'entrée u par la réponse impulsionnelle h :

$$v_n = (h * u)_n. \quad (3.4)$$

Si l'on prend la transformée de fourier de l'équation précédente, on trouve :

$$\hat{v}(v) = \hat{h}(v) \hat{u}(v) = \sum_k h_k u_{n-k}$$

Sur cette opération, qu'on appelle aussi *équation aux différences*, on voit donc clairement qu'une opération de filtrage permet d'agir directement sur le contenu fréquentiel d'un signal : certaine fréquence vont être atténuées (voire annulée) et d'autres vont être renforcées. La valeur critique d'une fréquence qui annule les fréquence d'un signal est appelée *fréquence de coupure* (voir plus bas).

Les signaux "exponentielles complexes" jouent un rôle particulier pour les filtres à temps continu, car ce sont les *signaux propres*. En effet, les signaux propres sont les suites de la forme $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x_k) = \mathcal{S}(z^k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{k-n} z^n \\ &= z^k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n} \\ &= H(z) z^k = H(s) x_k \end{aligned}$$

avec $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$ la valeur propre associée au signal propre $\{z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

3.4.3. Filtres FIR ou MA

3.4.3.1. Définition

Le fait de se limiter à un nombre fini d'opération impose que la réponse impulsionnelle n'ait qu'un nombre fini de coefficients h_k non nuls. La définition d'un filtre à réponse impulsionnelle finie, appelé aussi filtres à moyenne mobile s'écrit

Définition 3.22

(Filtre FIR ou MA)

Soit un filtre de réponse impulsionnelle h . Le filtre est dit "à réponse impulsionnelle finie" (FIR) ou "à moyenne mobile" (MA) si h est finie : $h = \{h_{-k_1}, \dots, h_0, \dots, h_{k_2}\}$

L'équation aux différences s'écrit alors :

$$y_n = \sum_{k=-k_1}^{k_2} h_k x_{n-k}$$

On appelle **ordre** du filtre, le nombre d'échantillons de sa réponse impulsionnelle.

On remarque qu'un filtre FIR est forcément stable, mais peut ne pas être causal. La condition pour qu'un tel filtre soit réalisable ne dépend donc que de sa causalité. L'équation aux différences d'un filtre FIR réalisable s'écrit donc :

$$v_n = \sum_{k=0}^K h_k u_{n-k} .$$

3.4.3.2. Synthèse par fenêtrage

On cherche à synthétiser un filtre RIF (ou MA) **causal**, qui s'approche le plus possible d'un filtre idéal recherché. Le filtre idéal a une réponse impulsionnelle $h^{\text{idéal}}$ à support infini, non causal :

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k x_{n-k} ,$$

tandis que le filtre RIF que l'on cherche étant causal, sa réponse impulsionnelle h doit être causale :

$$y_n = \sum_{k=0}^K h_k x_{n-k}$$

La première méthode de synthèse de filtre est la méthode par troncature, et peut se résumer par les trois points suivants Soit un filtre idéal de fonction de transfert $H^{\text{idéal}}$ et de réponse impulsionnelle $h^{\text{idéal}}$. Une méthodologie simple de synthèse d'un filtre RIF causal d'ordre $N+1$ est :

1. **Calcul** de la réponse impulsionnelle $h^{\text{idéal}}$ par transformée de Fourier inverse :

$$h_n^{\text{idéal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(v) e^{i2\pi n v} dv$$

3. Traitement du signal numérique

2. **Troncature** de la réponse impulsionnelle h^{ideal}

$$h^{\text{tronc}} = \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \dots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

3. Application d'un **retard** sur h^{tronc} , afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{tronc}}$$

Cette méthode présente un inconvénient majeur : la troncature (i.e. multiplication d'une fenêtre rectangulaire), fait apparaître un phénomène de Gibbs. Une solution est d'utiliser une fenêtre plus douce que la fenêtre rectangulaire, afin d'éviter les coupures franches et atténuer ce phénomène. Les fenêtres les plus courantes sont les suivantes

- Bartlett (ou triangulaire)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hann

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pourra se reporter à la figure 3.5 pour une représentation temporelle de ces fenêtres, et à la figure 3.4.3.2 pour leur représentation spectrale.

Les caractéristiques principales des fenêtres peuvent se résumer par

- la largeur du lobe principal;
- le rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire;
- l'atténuation minimale en bande atténuée.

On résume dans le tableau 3.2 les caractéristiques principales des fenêtres précédentes.

La procédure par troncature précédente devient alors la synthèse par fenêtrage

- **Calcul** de la réponse impulsionnelle h^{ideal} par transformée de Fourier inverse :

$$h_n^{\text{ideal}} = \int_{-1/2}^{1/2} H(\nu) e^{i2\pi n\nu} d\nu$$

3.4. Filtrage numérique

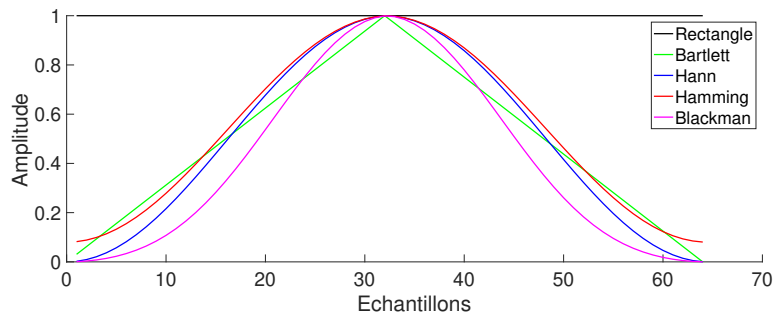
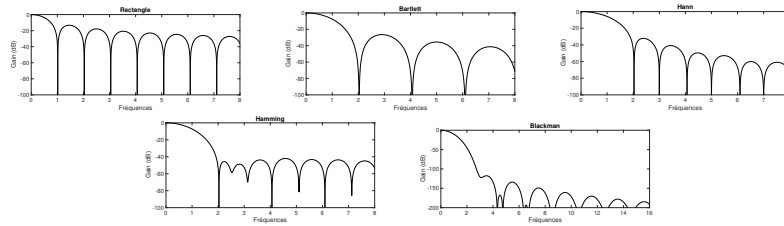


FIGURE 3.5. – Représentation temporelle des fenêtres classiques



Type de fenêtre	Largeur du lobe principal	Rapport d'amplitude	Atténuation minimale
Rectangulaire	$4\pi/N$	-13 dB	-21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	-25 dB	-25 dB
Hann	$8\pi/N$	-31 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/N$	-41 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/N$	-57 dB	-74 dB

TABLE 3.2. – Caractéristique principales des fenêtres

3. Traitement du signal numérique

- **Fenêtrage** de la réponse impulsionnelle h^{ideal}

$$h^{\text{win}} = w \cdot \{h_{-N/2}^{\text{ideal}}, \dots, h_{N/2}^{\text{ideal}}\}$$

- Application d'un **retard** sur h^{tronc} , afin de décaler les indices pour rendre le filtre causal

$$h_n^{\text{RIF}} = h_{n-N/2}^{\text{win}}$$

3.4.4. Filtre IIR

Par opposition, les filtres à *réponse impulsionnelle infinie*, ou filtre IIR (Infinite Impulse Response) ont une infinité de coefficients h_k non nuls. Pour implémenter de tels filtres, il faut a priori les approcher par des filtres FIR en remplaçant par des zéros tous les coefficients plus petits qu'une certaine limite de précision fixées :

$$v_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k u_{n-k} \simeq \sum_{k=-k_1}^{k_2} h_k u_{n-k}.$$

Il peut cependant arriver que le nombre de coefficients à retenir pour atteindre la précision voulue soit excessivement grand, et conduise à des coûts prohibitif en temps de calculs. Si l'on reprend l'exemple du filtre passe-bas idéal, sa réponse impulsionnelle en temps discret est

$$h_n = \frac{\sin(2\pi\nu_0 n)}{\pi n}.$$

Les coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre décroissent donc en $\frac{1}{n}$. Par conséquent, si l'on veut approcher ce filtre avec une erreur d'environ 10^{-6} , il faudra de l'ordre de un million de coefficients. Il faut donc compter dix milliard d'opérations par secondes pour traiter un signal de paroles échantillonné à 10 kHz. On voit que la charge devient trop lourde pour ce type d'opération.

Il existe cependant une alternative viable pour implémenter des filtres IIR avec un nombre limité d'opérations : *les filtres récursifs*. Étant donné un signal d'entrée u , l'idée est de construire un signal de sortie v de la forme :

$$v_n = \sum_{k=0}^M b_k u_{n-k} - \sum_{k=1}^N a_k v_{n-k}, \quad (3.5)$$

c'est-à-dire tel que v_n soit obtenu par filtrage des u_m antérieurs à n et filtrage des v_m antérieur à n en utilisant les filtres $\{b_0, \dots, b_M\}$ et $\{a_1, \dots, a_N\}$. Si cette équation a une solution unique, alors l'opérateur $T : u \rightarrow v$ est un filtre récursif.

Pour étudier l'existence de solution, on pose $a_0 = 1$. L'équation (3.5) est équivalente au système

$$\sum_{k=0}^N a_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^M b_k u_{n-k},$$

qui après transformation en z devient :

$$V(z) \left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) = U(z) \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right)$$

ce qui s'écrit

$$V(z) = H(z)U(z) .$$

avec

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} .$$

La solution est donc bien définie si le dénominateur ne s'annule jamais. Comme dans le cas continue, on peut factoriser cette fraction rationnelle, et l'on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.11

Soit un filtre numérique de fonction de transfert

$$H(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$$

où le numérateur n et le dénominateur p sont deux polynômes. Le filtre récursif correspondant est bien défini si et seulement si aucun des pôles complexes n'est de module égal à 1.

De plus, le filtre est causal si et seulement si les pôles du dénominateur d ont un module strictement supérieur à 1.

3.4.5. Synthèse de filtre IIR

On se contentera de donner ici les grandes étapes, sans entrer dans les détails. Les méthodes générales existantes, qu'on ne présentera pas ici, sont :

- l'invariance impulsionnelle (on cherche h_n comme l'échantillonnage de $h(t)$)
- la transformation d'Euler (Approximation d'une dérivée continue en discret)
- la transformation bilinéaire (la plus classique)

On présentera ici les grandes familles de filtres IIR : butterworth, Tchebychev et elliptique. Et l'on suivra la méthode "pratique" générale de synthèse de filtres IIR qui peut se résumer par les trois points suivants

1. Définir un gabarit de filtre analogique
2. Approcher ce gabarit par la fonction de transfert d'un filtre de type donné (Butterworth, Tchebychev, ...)
3. Transformer la fonction de transfert analogique en fonction de transfert numérique

3. Traitement du signal numérique

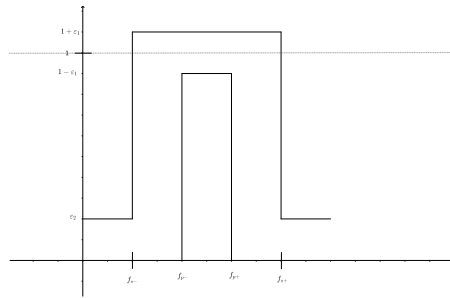


FIGURE 3.6. – Gabarit d'un filtre

3.4.5.1. Spécifications

On commence par se donner un gabarit de filtre (cf. figure 3.6), sur lequel on précise les spécifications générales :

- Choix du type : passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande...
- Choix du Gabarit

et les spécifications particulières :

- Bande passante $[f_{p-}, f_{p+}]$
- Bande atténuée $[0, f_{a-}] [f_{a+}, 0.5]$
- Ondulation en bande passante ε_1
- Ondulation en bande atténuée ε_2

En pratique, on choisira parmi les familles de filtres suivantes.

3.4.5.2. Filtres classiques

On peut citer trois grandes familles :

1. Filtres de Butterworth
2. Filtres de Tchebychev I et II
3. Filtre Elliptique
4. (+ Filtres de Bessel)

Filtres de Butterworth La fonction de transfert des filtres de Butterworth est donnée par

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$$

et représentée sur la figure 3.7. Ses caractéristiques principales sont

- Fréquence de coupure f_c
- Ordre N
- Module de la fonction de transfert monotone

3.4. Filtrage numérique

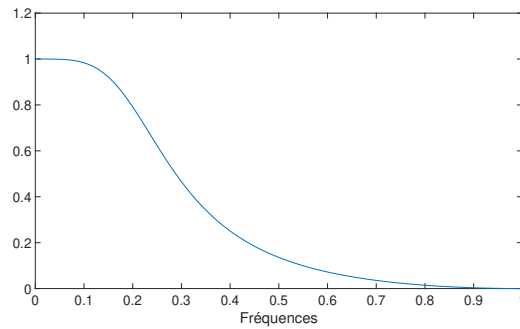


FIGURE 3.7. – Filtre de butterworth

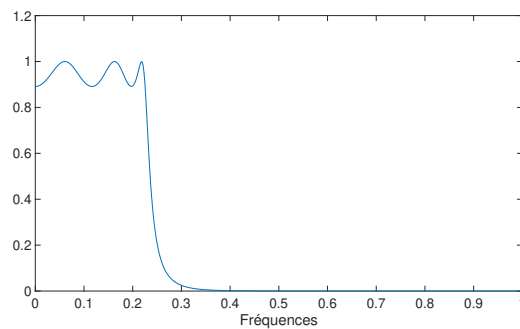


FIGURE 3.8. – Filtre de Tchebychev I

Filtres de Tchebychev I La fonction de tranfert des filtres de Tchebychev I est donnée par

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f}{f_p}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N . et représentée sur la figure 3.8. Ses caractéristiques principales sont

- Bande passante f_p
- Ondulation en bande passante ε
- Ordre N
- Monotone en bande atténuée

Filtres de Tchebychev II La fonction de tranfert des filtres de Tchebychev II est donnée par

3. Traitement du signal numérique

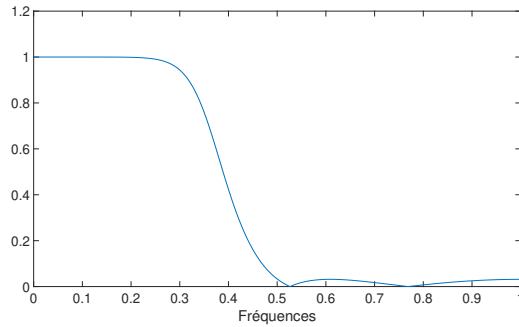


FIGURE 3.9. – Filtre de Tchebychev II

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{f_s}{f}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N et représentée sur la figure 3.9. Ses caractéristiques principales sont

- Bande atténuée f_s
- Monotone en bande passante
- Ondulation en bande atténuée ε
- Ordre N

Filtres elliptiques La fonction de transfert des filtres de Tchebychev II est donnée par

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_N^2\left(\frac{f}{\sqrt{f_p f_s}}\right)}$$

où T_N est un polynôme de Tchebychev de degré N et représentée sur la figure 3.10. Ses caractéristiques principales sont

- Bande passante f_p
- Bande atténuée f_s
- Ondulation en bande atténuée et en bande atténuée ε
- Ordre N

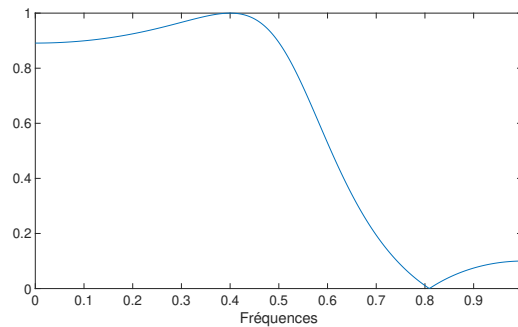


FIGURE 3.10. – Filtre Elliptique

3.5. Signaux numériques finis

3.5.1. Filtres finis et convolution circulaire

3.5.2. La transformée de Fourier finie (TFF)

En pratique, un traiteur de signal s'intéresse à des signaux numériques à support temporel limité, c'est-à-dire des suites numériques de longueur finie. On définit alors la transformée de Fourier finie du signal, qui est en fait la série de Fourier discrète du signal périodisé.

Définition 3.23 (Transformée de Fourier finie)

Soit $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel qu'il existe un $N > 0$ et $s_n = 0$ pour tout $n \notin \{0, \dots, N-1\}$. Alors la transformée de Fourier discrète finie de s est donnée par :

$$\hat{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn}.$$

On peut reconstruire le signal avec la formule d'inversion idoine.

Théorème 3.12 (Inversion de la TFF)

Soit $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel qu'il existe un $N > 0$ et $s_n = 0$ pour tout $n \notin \{0, \dots, N-1\}$ et soit $\hat{s}$ sa transformée de Fourier. Alors

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn}.$$

Les formules de Plancherel-Parseval s'adaptent directement :

Théorème 3.13 (Plancherel-Parseval)

3. Traitement du signal numérique

Soit $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel qu'il existe un $N > 0$ et $s_n = 0$ pour tout $n \notin \{0, \dots, N-1\}$ et soit $\hat{s}$ sa transformée de Fourier. Alors

$$\|s\|_2^2 = \frac{1}{N} \|\hat{s}\|_2^2,$$

ie.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |s|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{s}_k|^2.$$

Soit $v = \{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel que $v_n = 0$ pour tout $n \notin \{0, \dots, N-1\}$ et soit $\hat{v}$ sa transformée de Fourier. Alors

$$\langle s, v \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{s}, \hat{v} \rangle$$

ie.

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_n v_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k \hat{v}_k.$$

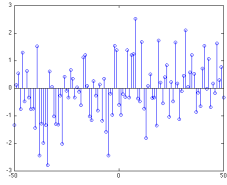
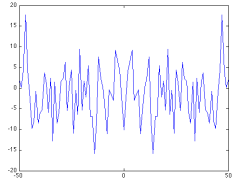
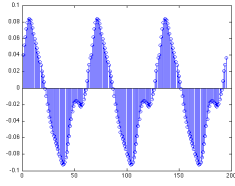
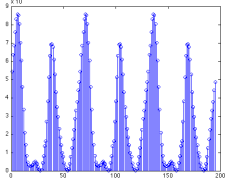
Ici encore, la convolution dans le domaine temporel devient une multiplication dans le domaine fréquentiel et vice-versa. Attention cependant, la convolution discrète est ici une convolution *circulaire*, c'est-à-dire que le signal considéré doit être périodisé, de période N .

En pratique, la TFF s'implémente grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT pour Fast Fourier Transform).

3.6. Récapitulatif : Fourier pour les signaux à temps discret

On a vu en tout deux types de transformées de Fourier. Au final, toutes ces transformées sont assez semblables, avec des formules adéquates pour l'inversion, ou encore la conservation de l'énergie. On insiste ici sur les *différences* pratiques, suivant qu'on choisisse un modèle plutôt qu'un autre.

3.6. Récapitulatif : Fourier pour les signaux à temps discret

signal temporel	transformée de Fourier
<p>$s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (signal numérique d'énergie finie)</p>  <p>$s_n = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{s}(\nu) e^{i2\pi \nu n} d\nu$</p>	<p>$\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ (fonction continue périodique)</p>  <p>$\hat{s}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n e^{-i2\pi \nu n}$</p>
<p>$s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\{0, \dots, N-1\})$ (signal numérique fini, périodique)</p>  <p>$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}_k e^{i \frac{2\pi}{N} k n}$</p>	<p>$\hat{s} \in \ell^2(\{0, \dots, N-1\})$ (suite numérique finie périodique)</p>  <p>$\hat{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i \frac{2\pi}{N} k n}$</p>

4



Signaux aléatoires

Objectifs:

- Différencier le modèle déterministe et le modèle aléatoire
- Stationnarité et fonction d'autocorrélation
- Connaître le Théorème de Wiener-Khintchine
- Savoir ce qu'est un bruit blanc

4.1. Définitions

On commence par donner une définition "heuristique" d'un signal aléatoire, mettant en évidence l'intuition que l'on peut avoir à propos d'une expérience aléatoire

Définition 4.1 (Définition "heuristique")

Un signal aléatoire est un signal qui ne se reproduit pas à l'identique lors qu'on ré-itére une expérience dans les mêmes conditions.

Plus précisément, on peut définir un signal aléatoire comme une variable aléatoire qui dépend du temps.

Définition 4.2 (Définition mathématique)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, et $\mathcal{L}(\Omega)$ l'espace des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Un signal aléatoire est une application

$$X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\Omega) \quad (4.1)$$

$$t \mapsto X(t) \quad (4.2)$$

Un signal aléatoire est donc un *processus stochastique*, c'est à dire une évolution d'une variable aléatoire en fonction du temps. Pour une réalisation d'un événement $\omega \in \Omega$, l'application $t \mapsto X(\omega, t)$ s'appelle *une trajectoire* du signal aléatoire X .

4.2. Descripteurs

Tout comme les variables aléatoires, un signal aléatoire pourra se caractériser par quelques descripteurs comme la moyenne, la variance etc.

Définition 4.3 (Descripteur du premier ordre : espérance)

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

Définition 4.4 (Descripteurs du second ordre)

- Puissance instantanée

$$P_X(t) = E[|X(t)|^2]$$

- Variance :

$$\text{Var}[X(t)] = E[|X(t) - m_X(t)|^2]$$

- Écart type :

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\text{Var}[X(t)]}$$

Définition 4.5 (Signal du second ordre)

Un signal aléatoire X est dit du second ordre si $\forall t E[|X(t)|^2] < +\infty$. Il est uniformément du second ordre s'il existe $B > 0$ tel que $\forall t E[|X(t)|^2] < B$.

Un signal aléatoire du second ordre est dit continue en moyenne d'ordre 2 lorsque

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E[|X(t+\delta) - X(t)|^2] = 0$$

Un descripteur essentiel des signaux aléatoires est la fonction d'autocorrélation

Définition 4.6 (autocorrélation)

$$R_X(t, s) = E[X(t)X(s)]$$

Définition 4.7 (Covariance)

$$\begin{aligned} C_X(t, s) &= E[(X(t) - \mu(t))(\bar{X}(s) - \bar{\mu}(s))] \\ &= R_X(t, s) - \mu(t)\bar{\mu}(s) \end{aligned}$$

Une hypothèse importante sera l'hypothèse de stationnarité d'un signal aléatoire

Définition 4.8 (Signal stationnaire)

Un signal est dit stationnaire lorsque ses propriétés statistiques sont invariantes par translation dans le temps.

On se limitera en pratique à l'invariance des deux premiers moments

Définition 4.9 (Signal stationnaire en moyenne d'ordre 2)

Soit X un signal aléatoire du second ordre. X est stationnaire en moyenne d'ordre 2 si sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont invariantes par translation dans le temps

$$\mu_X(t) = \mu_X(0) = \mu_X$$

$$R_X(t + \tau, s + \tau) = R_X(t, s) = R_X(t - s)$$

Remarque : on a forcément $|R_X(t - s)| \leq R_X(0)$

En pratique, l'hypothèse stationnaire ne suffit pas. En effet, si cette hypothèse nous dit que les statistiques ne changent pas au cours du temps, en pratique on n'a accès qu'à une seule trajectoire du signal aléatoire. On a besoin d'une hypothèse supplémentaire qui nous permettent de calculer les statistiques sur cette unique trajectoire. Cette hypothèse est l'**ergodicité**

Définition 4.10 (Ergodicité)

Un signal aléatoire est ergodique ssi ses moyennes temporelles sont déterministes.

Théorème 4.1 (Ergodicité d'un signal stationnaire)

Un signal aléatoire stationnaire est ergodique ssi pour toute fonction g

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(X(t)) dt = E[g(X(t))]$$

En particulier, la moyenne temporelle est la moyenne du processus

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt = \mu_X$$

Si l'on a deux signaux aléatoires X et Y on peut définir les fonctions d'intercorrélation et inter-covariance

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$$

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$$

Si X et Y sont stationnaires au sens large, alors $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2) = R_{XY}(t)$ et $C_{XY}(t_1, t_2) = C_{XY}(t_1 - t_2) = C_{XY}(t)$

4.3. Spectre d'un signal aléatoire

contrairement aux signaux déterministe, il ne fait pas vraiment de sens de parler de la transformée d'un signal aléatoire, étant donné que ça sera elle-même un processus aléatoire (dépendant de la fréquence). On s'intéressera à la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire :

Définition 4.11

(Densité spectrale de puissance)

Soit X un signal stationnaire. La densité spectrale de puissance de X est la quantité donnée par

$$S_X(\nu) = E[|\hat{X}(\nu)|^2]$$

En pratique, le calcul de cette densité spectrale de puissance pourra se faire à l'aide du théorème suivant

Théorème 1

(Wiener-Khintchine)

Soit X un signal stationnaire. Sa densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Plus précisément

- Si X est un processus aléatoire continu

$$S_X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

avec $S_X(\nu) = E[|\hat{X}(\nu)|^2]$ et $R_X(t) = E[x(\tau)x(\tau+t)]$ et

$$R_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

- Si X est un processus aléatoire discret

$$S_X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_X[n] e^{-i2\pi\nu n}$$

avec $S_X(\nu) = E[|\hat{X}(\nu)|^2]$ et $R_X[t] = E[x[\tau]x[\tau+t]]$ et

$$R_X[n] = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\nu) e^{i2\pi\nu n} d\nu$$

Pour le signaux déterministe, la fonction d'autocorrélation devient

- dans le cas d'un signal x analogique

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) dt \quad (4.3)$$

- dans le cas d'un signal x numérique

$$R_x[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]x[n+k] \quad (4.4)$$

et le théorème de Wiener-Khintchine est toujours valable.

4.4. Bruit blanc

Définition 4.12 **(Bruit blanc)**

- bruit blanc fort Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire discret. X st un bruit blanc fort si les X_k sont centrés et i.i.d.
- bruit blanc faible Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire discret. X st un bruit blanc faible si les X_k sont centrés, décorrés et de variance finie.

Remarque : Pour les processus gaussiens, les notions de bruits blancs forts et faibles sont confondues

Théorème 2 **(bruit blanc gaussien)**
Soit $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un processus aléatoire discret. X est un bruit blanc gaussien ssi

- Les X_k sont indépendants
- $X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$

Proposition 4.1

- La fonction d'autocorrélation est un dirac :

$$R_X(t) = \sigma_X^2 \delta(t)$$

- La densité spectrale de puissance de X est constante :

$$S_X(f) = \sigma_X^2$$

4.5. Filtrage des signaux aléatoires

Soit un filtre de réponse impulsionnelle (déterministe!) h . Soit X un signal aléatoire. On peut filtrer ce signal par h pour obtenir un nouveau signal aléatoire Y

$$Y = h \star X$$

4. Signaux aléatoires

qui admet pour moyenne

$$\begin{aligned}
 \mu_Y(t) &= E[Y(t)] = E[h \star X(t)] \\
 &= E \left[\int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) E[x(t-\tau)] d\tau \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \mu(t-\tau) d\tau \\
 &= h \star \mu_X(t)
 \end{aligned}$$

et pour autocorrélation

$$\begin{aligned}
 R_Y(t, s) &= E[Y(t)Y(s)] = E[h \star X(t)h \star X(s)] \\
 &= E \left[\int_{\mathbb{R}} h(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \int_{\mathbb{R}} h(\tau_2) x(s-\tau_2) d\tau_2 \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(\tau_1) h(\tau_2) E[x(t-\tau_1)x(s-\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned}$$

Si de plus, X est stationnaire au sens large alors on a

$$\begin{aligned}
 \mu_Y(t) &= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \mu_X(t-\tau) d\tau \\
 &= \mu_X \int_{\mathbb{R}} h(\tau) d\tau \\
 &= \mu_X \hat{h}(0)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 R_Y(t, s) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(\tau_1) h(\tau_2) E[x(t-\tau_1)x(s-\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(t-s-\tau_1+\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= R_Y(t-s)
 \end{aligned}$$

Y est donc aussi stationnaire au sens large.

En appliquant le théorème de WK, on obtient après changements de variables

$$S_Y(\nu) = \hat{R}_Y(t) = |\hat{h}(\nu)|^2 S_X(\nu)$$

Soit X_1 et X_2 deux signaux stationnaires au sens large. Soit deux filtres de réponses impulsionnelle h_1 et h_2 . On note

$$Y_1 = h_1 \star X_1 \quad \text{et} \quad Y_2 = h_2 \star X_2$$

4.5. Filtrage des signaux aléatoires

On peut alors écrire la formule des interférences

$$R_{Y_1 Y_2}(t) = (h_1 \star R_{X_1 X_2} \star h_2^-)(t)$$

avec $h_2^-(t) = h_2(-t)$

En particulier, si $X_1 = X_2 = X$ et $h_1 = h$ et $h_2 = \delta$, on a $Y = h \star X$, $Y_2 = X$

$$R_{Y_1 Y_2}(t) = R_{YX}(t) = (h \star R_{XX})(t)$$

Le théorème de WK donne

$$S_{Y_1 Y_2}(\nu) = h_1(\nu) S_{X_1 X_2}(\nu) \overline{h_2(\nu)}$$

5

■ Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

Si la transformée de Fourier permet de connaître le contenu fréquentiel d'un signal, le passage en Fourier fait perdre toute l'information temporelle. Prenons l'exemple de deux notes de piano jouées simultanément, dont la représentation temporelle ainsi que sa transformée de Fourier sont représentés sur la figure 5.1. La lecture du spectre nous donne directement la fréquence des notes jouées.

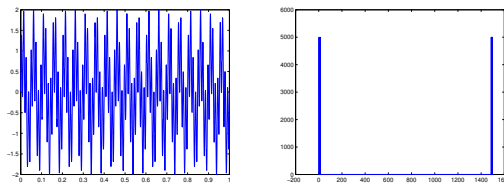


FIGURE 5.1. – Signal de piano : les notes sont jouées en même temps. Gauche : représentation temporelle. Droite : spectre fréquentiel

On représente maintenant sur la figure 5.2 un signal de piano où les mêmes notes sont jouées l'une après l'autre. Si la transformée de Fourier nous indique toujours parfaitement la fréquence des deux notes jouées, on n'a aucune information sur le moment où les notes sont jouées. On aimerait donc exploiter à la fois l'information temporelle et fréquentielle d'un signal. On est donc obligé d'aller plus loin en définissant des transformées qui prennent en compte à la fois l'information temporelle et l'information fréquentielle.

On présente ici les deux représentations temps-fréquence principales : la transformée de Fourier à fenêtre et la transformée en ondelettes. Pour cette dernière, on parlera plutôt de transformée temps-échelle.

5. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

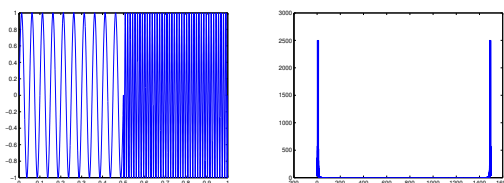


FIGURE 5.2. – Signal de piano : les notes sont jouées l'une après l'autre. Gauche : représentation temporelle. Droite : spectre fréquentiel

5.1. Analyse temps-fréquence

L'idée, simple, de l'analyse temps-fréquence est de faire une analyse spectrale "locale" du signal, à l'aide d'une fenêtre que l'on fera "glisser" le long du signal. On va donc faire la corrélation du signal avec différents *atomes temps-fréquence* qui auront une certaine concentration (ou résolution) en temps et en fréquence.

5.1.1. Principe d'incertitude d'Heisenberg

Avant de définir précisément une transformée temps-fréquence, on va voir qu'un signal ne peut être à la fois parfaitement localisé en temps et parfaitement localisé en fréquence. Ce principe s'illustre naturellement avec les instruments de musiques : un coup de batterie est très bien localisé en temps, mais on ne peut pas associer une note précise au coup donné. Inversement, une note de violon devra être jouée pendant un temps minimal pour que l'oreille reconnaisse la note jouée. Par conséquent, la notion de "point" dans l'espace temps-fréquence n'a, *a priori*, pas de sens. On va donc associer au plan temps-fréquence des "boîtes" dont la taille sera liée à l'incertitude de la mesure temps-fréquence.

On représente couramment le domaine temps-fréquence par un plan où le temps est sur l'axe des abscisses et les fréquences sur l'axe des ordonnées. Un signal aura donc une certaine répartition en temps et en fréquence dans le plan.

Définition 5.1

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$. Dans la suite, on note $E = \|x\|^2$.

- On appelle centre temporel de x la quantité

$$\langle t \rangle = \bar{t} = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt.$$

Le centre temporel de x correspond à la valeur moyenne en temps de l'énergie de x .

- On appelle centre fréquentiel de x la quantité

$$\langle f \rangle = \bar{f} = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} f |\hat{x}(f)|^2 dv.$$

Le centre fréquentiel de x correspond à la valeur moyenne en fréquence de l'énergie de x .

- On appelle écart temporel de x la valeur σ_t définie par

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} (t - \bar{t})^2 |x(t)|^2 dt.$$

Cette valeur correspond à l'écart type en temps de l'énergie de x .

- On appelle écart fréquentiel de x la valeur σ_f définie par

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} (f - \bar{f})^2 |\hat{x}(f)|^2 dv.$$

Cette valeur correspond à l'écart type en fréquence de l'énergie de x .

Ainsi, on peut délimiter dans le plan temps-fréquence un rectangle de taille $\sigma_t \times \sigma_f$ qui contiendra la majorité de l'énergie du signal. On appelle ce rectangle *boîte d'Heisenberg*. Le théorème, appelé *Principe d'incertitude d'Heisenberg* suivant démontre le résultat annoncé ci-dessus : un signal ne peut pas être à la fois parfaitement localisé en temps ET en fréquence.

5. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

Théorème 3 (Principe d'incertitude d'Heisenberg)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ tel que σ_t et σ_f soient finis alors :

$$\sigma_f \sigma_t \geq \frac{1}{4\pi}$$

Avec égalité si et seulement si x est de la forme $a \exp(-b(t - t_0)^2) \exp(i2\pi f_0 t)$.

Ce qui veut dire que notre boîte d'Heisenberg a une surface supérieure ou égale à $\frac{1}{4\pi}$. La notion de point (t_0, f_0) dans le plan temps-fréquence n'est pas mesurable car le plan ne peut être divisé uniquement en rectangle d'aire supérieure à $\frac{1}{4\pi}$.

Avant d'énoncer le principe d'incertitude d'Heisenberg, nous avons besoin du résultat intermédiaire suivant.

Théorème 4 (Théorème de Weyl)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $tx(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et $x'(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\|x(t)\|^2 \leq 2 \|tx(t)\| \|x'(t)\|.$$

Avec égalité si et seulement si x est de la forme donnée plus haut.

Démonstration. Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\|x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = -2 \int_{\mathbb{R}} tx(t)x'(t) dt = -2 \langle tx(t); x'(t) \rangle.$$

par intégration par parties. On applique alors Cauchy-Schwarz, et on obtient

$$\|x\|^2 \leq 2 \|tx(t)\| \|x'(t)\|.$$

Pour avoir égalité dans l'équation précédente, il faut être dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, autrement dit il faut que $tx(t)$ et $x'(t)$ soient proportionnels. Le seul signal vérifiant ces conditions est la gaussienne. $\square$

On peut alors démontrer le principe d'incertitude.

Démonstration du Principe d'incertitude. Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose dans la suite que $\bar{t} = \bar{f} = 0$. Le cas général se déduit de celui-ci par translation. Par définition de la transformée de Fourier on sait que la transformée de Fourier de $x'(t)$ vaut $2\pi i f \hat{x}(f)$. L'identité de Plancherel nous donne alors

$$\|x'(t)\|^2 = \|2\pi i f \hat{x}(f)\|^2 = 4\pi^2 \|f \hat{x}(f)\|^2.$$

De plus, d'après le théorème de Weyl on a

$$\begin{aligned} E = \|x\|^2 &\leq 2 \|tx(t)\| \|x'(t)\| \leq 4\pi \|tx(t)\| \|f \hat{x}(f)\| \\ &\leq 4\pi E \sigma_f \sigma_t. \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient la définition 5.1 des écarts temporel et fréquentiel.

En ce qui concerne le cas d'égalité, on voit qu'il vient du cas d'égalité du théorème de Weyl, autrement dit on a égalité si et seulement si x est gaussien. $\square$

Maintenant que nous avons vu quelles sont les conditions que doivent remplir les décompositions temps-fréquence, nous allons pouvoir définir une "analyse temps-fréquence".

5.1.2. Transformée de Fourier à fenêtre

La première approche pour construire une décomposition temps-fréquence est de repartir de la transformée de Fourier et de la relocaliser en temps. C'est le principe de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (aussi appelée transformée de Fourier à court terme).

5.1.2.1. Définition et inversion

Pour définir une telle transformée, on restreint le signal à une portion que l'on fait glisser sur l'axe temporel. Pour cela, on définit une fenêtre grâce à une fonction g lisse et bien localisée autour de l'instant $t = 0$ qui délimitera la fenêtre d'analyse.

Définition 5.2

(Transformée de Fourier à court terme)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier à court terme de x de fenêtre d'analyse $g \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction X de deux variables définie par

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(b, \nu) \mapsto X(b, \nu) = \left\langle x; g(t-b)e^{2i\pi\nu t} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \bar{g}(t-b) e^{-2i\pi\nu t} dt.$$

Dans la suite, on note $g_{b,\nu}(t) = g(t-b)e^{2i\pi\nu t}$. Ces fonctions sont appelées les **atomes temps-fréquence** de la décomposition. On voit que pour ν et b fixés, cette décomposition est localisée au voisinage de (b, ν) grâce à la localisation en temps de g et à la modulation par $e^{2i\pi\nu t}$, même si cette localisation ne peut jamais être parfaite.

La transformée de Fourier à court terme donne une bonne décomposition d'un signal au sens donné par les deux propriétés suivantes qui sont l'inversion et la conservation de l'énergie.

Théorème 5

(Inversion)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ une fenêtre admissible. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} X(b, \nu) g(t-b) e^{2i\pi\nu t} db d\nu.$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème nous allons partir du membre de droite de la définition 5.2 de la transformée de Fourier à fenêtre et écrire la transformée de Fourier à court terme comme la transformée de Fourier du signal fenêtré $x_{g_b}(t) = x(t) \bar{g}(t-b)$.

5. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} X(b, \nu) g(t-b) e^{2i\pi \nu t} db d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{x}_{g_b}(\nu) g(t-b) e^{2i\pi \nu t} db d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t-b) \int_{\mathbb{R}} \hat{x}_{g_b}(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t-b) x_{g_b}(t) db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(t-b) x(t) \bar{g}(t-b) db \\
 &= x(t) \int_{\mathbb{R}} |g(t-b)|^2 db \\
 &= x(t) \|g\|_2^2
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat voulu. $\square$

Théorème 6 (Conservation de l'énergie)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ une fenêtre admissible. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |X(b, \nu)|^2 db d\nu. \quad (5.1)$$

Démonstration. On écrit ici aussi la transformée de Fourier à court terme du signal x comme la transformée de Fourier du signal fenêtré $x_{g_b}(t) = x(t) \bar{g}(t-b)$, puis on utilise le théorème de Plancherel-Parseval.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |X(b, \nu)|^2 db d\nu &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{x}_{g_b}(\nu)|^2 db d\nu \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x_{g_b}(t)|^2 dt db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x(t) \bar{g}(t-b)|^2 dt db \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\bar{g}(t-b)|^2 db dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 \|g\|_2^2 dt \\
 &= \|g\|_2^2 \|x\|_2^2
 \end{aligned}$$

$\square$

L'application qui au couple (b, ν) associe $|X(b, \nu)|^2$ est appelé le **spectrogramme** de x . Il représente la distribution de la quantité d'énergie présente dans le signal autour des fréquences f et du temps b .

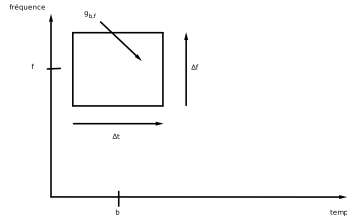


FIGURE 5.3. – Boîte d'Heisenberg d'un atome temps-fréquence.

5.1.2.2. Choix de la fenêtre

Comme nous l'avons vu, la transformée de Fourier à court terme est entièrement caractérisée par ses atomes temps-fréquence $g_{b,f}$, eux mêmes définis grâce à la fenêtre g . En pratique, pour bien définir la transformée nous devons donc bien définir cette fonction. Pour cela plusieurs choix sont possibles. Nous allons ici en donner deux mais on peut en trouver d'autres dans la littérature.

Tout d'abord nous allons considérer un choix "naïf" de fenêtre donné par une fonction rectangulaire. Autrement dit on considère

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Suivant le choix de T_0 , cette fonction g peut être plus ou moins bien localisée en temps. Malheureusement si on regarde sa transformée de Fourier, on obtient $\hat{g}(f) = \text{sinc}(T_0 f)$ qui est, pour le coup, mal localisée.

Pour déterminer le choix optimal de la fenêtre, on regarde ce qu'il se passe dans le plan temps-fréquence. Sur la figure 5.3 on peut voir que quelque soit l'atome considéré, la surface de sa boîte d'Heisenberg est la même, donné par la résolution de g . Une bonne transformée de Fourier à court terme est bien localisée en temps et en fréquence, c'est donc celle correspondant à la fenêtre dont la boîte d'Heisenberg a une surface minimale. Nous avons vu dans le Théorème 3 que dans ce cas, la fenêtre optimale est gaussienne. La transformée de Fourier à court terme avec fenêtre Gaussienne s'appelle **transformée de Gabor**. Par la suite, on confondra souvent transformée de Gabor et transformée de Fourier à court terme. L'expression transformée de Gabor étant principalement utilisée lors de la discrétisation.

La transformée de Fourier à court terme répond à l'attente d'une analyse temps-fréquence, bien que limitée intrinsèquement par le principe d'incertitude d'Heisenberg. Cependant, pour certains signaux l'information essentielle peut être contenue dans ses singularités, et ses structures irrégulières. C'est le cas des images par exemple, l'oeil étant sensible aux contours, ou bien les transitoires d'un signal médical comme pour la détection de zones épileptique par électro-encéphalogramme.

5. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

C'est pour ce genre d'applications que les ondelettes ont été introduites dans les années 80.

5.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes continue constitue une alternative à la transformée temps-fréquence définie plus haut. Elle repose sur l'analyse de la fonction par translation et dilatation d'une *ondelette mère* ψ .

5.2.1. Définitions

L'ondelette mère ψ doit vérifier certaines conditions données dans la définition suivante.

Définition 5.3 (Conditions d'admissibilité)

Une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ est admissible si elle vérifie la condition

$$0 < c_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(v)|^2}{|v|} dv < \infty$$

En particulier, $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. Autrement dit une ondelette est forcément de moyenne nulle.

D'après la condition d'admissibilité les ondelettes sont forcément des "petites" fonctions oscillantes d'où leur nom. On peut maintenant donner la définition d'une transformée en ondelette.

Définition 5.4 (Transformée en ondelettes continue)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ une ondelette admissible. On définit la transformée en ondelettes continue de x comme la fonction de deux variables définie par :

$$C_x : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a, b) \mapsto C_x(a, b) = \left\langle x; \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

Comme pour les atomes de la décomposition temps-fréquence, on note dans la suite $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Les $\psi_{a,b}$ sont les ondelettes, caractérisées par l'ondelette-mère ψ . Les ondelettes sont obtenues en dilatant ψ d'un facteur a et en la translatant de b . Dans ce cas, a est le facteur d'échelle, correspondant à la fréquence $\frac{1}{a}$ tandis que b est la position.

Dans le plan temps-fréquence, les boîtes d'Heisenberg correspondantes sont illustrées sur la figure 5.4. On peut voir que pour a "grand", on a une bonne résolution temporelle (σ_t étant petit) et une faible résolution fréquentielle, et réciproquement.

5.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue

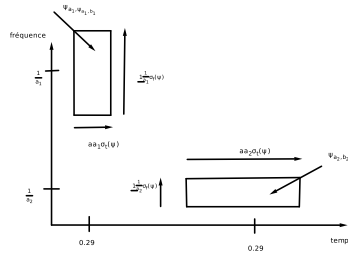


FIGURE 5.4. – Boîtes d'Heisenberg correspondant aux ondelettes.

Un exemple d'ondelette mère est donné par le "chapeau mexicain" qui correspond à la dérivée seconde d'une gaussienne. Il est représenté sur la figure 5.5.

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3}\sigma} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

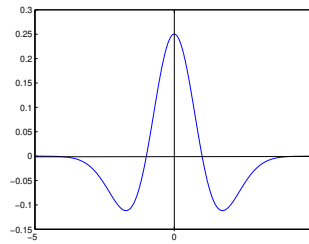


FIGURE 5.5. – Le chapeau mexicain.

5.2.2. Reconstruction et conservation de l'énergie

La transformée en ondelettes continue, comme l'analyse temps-fréquence, conserve toute l'information présente dans le signal, dans le sens où l'on a conservation de l'énergie. De plus, on peut reconstituer le signal à partir de sa transformée en ondelettes.

Théorème 7 (Conservation de l'énergie)

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi \in L^2$ une ondelette admissible. Alors :

$$\|x\|^2 = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |C_x(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}.$$

5. Au delà de Fourier : analyse temps-fréquence et temps-échelle

Démonstration. Soit ψ une ondelette admissible. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier on voit que

$$\widehat{\psi}_{a,b}(v) = \sqrt{a} \widehat{\psi}(av) e^{-2i\pi vb}. \quad (5.2)$$

Pour rappel, la décomposition de x en ondelettes est donnée par la fonction de deux variables :

$$C_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

On regarde dans un premier temps la fonction d'une variable $C_a : b \mapsto C_x(a, b)$. Si on calcule la transformée de Fourier de cette fonction :

$$\begin{aligned} \widehat{C}_a(v) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-2i\pi vb} dt db \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-2i\pi vb} db \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi t} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{2i\pi v(t-b)} db \right) dt \\ &= \widehat{x}(v) \sqrt{a} \widehat{\psi}(av), \end{aligned} \quad (5.3)$$

où on a fait le changement de variable $u = \frac{t-b}{a}$ dans la dernière équation.

En utilisant la formule de Parseval pour la transformée de Fourier, on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} |C_a(b)|^2 db = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(v)|^2 a |\widehat{\psi}(av)|^2 dv.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_*^+} \int_{\mathbb{R}} |C_a(b)|^2 \frac{db da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}_*^+} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(v)|^2 a |\widehat{\psi}(av)|^2 dv \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(v)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}_*^+} |\widehat{\psi}(av)|^2 \frac{da}{a} \right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{x}(v)|^2 dv c_{\psi} \end{aligned}$$

Où dans la dernière équation on a fait le changement de variable $u = av$. □

On appelle **scalogramme** de x la fonction qui à (a, b) associe $|C_x(a, b)|^2$. Cette fonction représente la distribution de l'énergie de x à l'échelle a et à la position b . Voyons maintenant la reconstruction à l'aide des ondelettes.

Théorème 8 (Inversion)

5.2. Analyse temps-échelle : la transformée en ondelettes continue

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ et ψ une ondelette admissible. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}.$$

Démonstration. Notons

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}.$$

On va montrer qu'on a bien $f(t) = x(t)$. Pour cela, on utilise encore une fois la transformée de Fourier, autrement dit on calcule $\hat{f}(v)$ qui vérifie

$$\begin{aligned} \hat{f}(v) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \psi_{a,b}(t) e^{-2i\pi vt} \frac{da db}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}(t) e^{-2i\pi vt} dt \frac{da db}{a^2} \end{aligned}$$

On reconnaît dans la dernière équation la transformée de Fourier de $\psi_{a,b}$ qui est donnée par (5.2). Donc

$$\hat{f}(v) = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \int_{\mathbb{R}} C_x(a, b) \sqrt{a} \hat{\psi}(av) e^{-2i\pi vb} \frac{da db}{a^2}$$

Et on retrouve dans cette équation la transformée de Fourier de C_a , la fonction qui à b associe $C_x(a, b)$. Or nous avons calculé cette transformée dans (5.3). Donc

$$\begin{aligned} \hat{f}(v) &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^*} \hat{x}(v) \sqrt{a} \hat{\psi}(av) \sqrt{a} \hat{\psi}(av) \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{c_\psi} \hat{x}(v) \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{|\hat{\psi}(av)|^2}{a} da = \hat{x}(v). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\hat{f}(v) = \hat{x}(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}$, ce qui revient à dire que $f = x$. $\square$

Finalement, la transformée en ondelettes fournit une bonne décomposition temps-échelle dans le sens défini précédemment. Cependant la reconstruction dans ce cas fait intervenir tous les facteurs d'échelle et de position réels. Cette décomposition est donc difficile à mettre en œuvre en pratique. C'est pourquoi nous allons voir par la suite comment retrouver le même type de résultats en ne considérant que des coefficients pris sur un ensemble discret.

6

■ Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

Une manière appréciable de discrétiser une transformée est de construire une base orthogonale, ce qui peut être souhaitable pour certaines applications (comme la compression par exemple). Rapidement, se pose alors la question de la possibilité de construction d'une base de Gabor orthogonale. C'est-à-dire s'il existe une fenêtre w permettant de construire une famille génératrice de $L^2(\mathbb{R})$, telle que

$$\langle g_{bv}, g_{b'v'} \rangle = 0 \text{ si } (b, v) \neq (b', v')$$

La réponse est donnée par le théorème suivant de Balian-Low.

Théorème 9 (Balian-Low)

Si $\{g_{bv}\}$ est une BON de $L^2(\mathbb{R})$ alors

$$\text{soit } \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt = +\infty \quad \text{soit } \int_{\mathbb{R}} v^2 |\hat{g}(v)|^2 dv = +\infty$$

En d'autres termes, on ne peut pas avoir une base de Gabor correctement localisée en temps **et** en fréquence.

Cependant, l'utilisation d'une transformée en cosinus plutôt qu'une transformée de Fourier ainsi que quelques hypothèses sur les fenêtres w vont nous permettre de construire une base orthonormée à fenêtre.

Pour l'analyse en ondelettes, Yves Meyer a construit la première famille orthogonale d'ondelettes alors qu'il cherchait à montrer l'impossibilité de construire une telle base! La généralisation se fait via l'analyse multirésolution.

6.1. Bases de cosinus locaux et MDCT

Les bases de cosinus locaux sont une sorte d'analyse de Fourier, ici en cosinus, à fenêtre qui permettent l'obtention d'une base orthogonale dont la transformée est réelle pour un signal réel. Ces bases reprennent donc l'idée d'une transformée

6. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

à fenêtre glissante, mais modulée par un cosinus plutôt que par une exponentielle complexe. Couplée à quelques hypothèses sur les fenêtres, on peut construire une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Les fenêtres doivent obéir à une certaine symétrie entre elles. Ces hypothèses sont résumées sur l'exemple de la figure 6.1 et données dans la définition suivante.

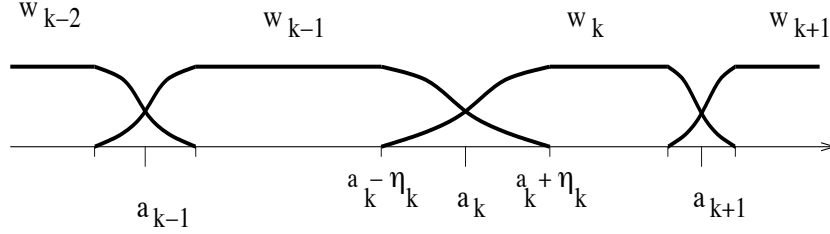


FIGURE 6.1. – Fenêtres MDCT

Définition 6.1 (bases de cosinus locaux)

Soit $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels, telle que $a_k < a_{k+1}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$. On pose $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite telle que $a_k + \eta_k < a_{k+1} - \eta_{k+1}$. Soit enfin une fenêtre w_k telle que

1. $0 \leq w_k(t) \leq 1$ $w_k(t) = 1$ sur $[a_k + \eta_k, a_{k+1} - \eta_{k+1}]$
2. $w_k(t) = 0$ si $t \leq a_k - \eta_k$ ou $t \geq a_{k+1} + \eta_{k+1}$
3. $w_{k-1}(a_k + t) = w_k(a_k - t)$ et $w_k(a_k + t)^2 + w_{k-1}(a_k + t)^2 = 1$ pour $t \in [-\eta_k, \eta_k]$

On définit alors la famille $\{u_{kn}\}_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}}$ des atomes de cosinus locaux

$$u_{kn}(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell_k}} w_k(t) \cos\left(\frac{\pi}{\ell_k} (n + 1/2)(t - a_k)\right),$$

avec $\ell_k = a_{k+1} - a_k$.

Théorème 10

La famille $\{u_{kn}\}_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans des applications comme le codage MP3, les fenêtres utilisées sont identiques, ce qui donne les bases MDCT (pour Modified Discrete Cosine Transform). L'avantage de ces bases orthogonales est, comme pour la transformée de Fourier à fenêtre, de pouvoir choisir la taille de la fenêtre afin de prendre en compte plutôt l'information fréquentielle avec une fenêtre longue, ou plutôt l'information temporelle avec une fenêtre courte, tout en conservant une transformée réelle, l'amélioration AAC du MP3 utilise cette possibilité pour s'adapter au contenu du signal.

6.2. Construction de bases d'ondelettes

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les ondelettes donnent une bonne représentation temps-fréquence d'un signal. Cette partie est consacrée à la construction de familles d'ondelettes facilement implémentables en pratique, la transformée en ondelettes discrète. Cette transformée en ondelettes nous permettra aussi de construire une base de $L^2(\mathbb{R})$.

6.2.1. Analyse multirésolution et bases d'ondelettes orthogonales

L'analyse multirésolution consiste à projeter le signal à énergie finie étudié sur un ensemble d'espaces d'approximations successives V_j . Ces espaces sont définis ci-après :

Définition 6.2 (Analyse multirésolution)

On appelle analyse multirésolution une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ telle que

1. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1}$ (propriété d'emboîtement)
2. $\lim_{j \rightarrow -\infty} \overline{V_j} = \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R})$, où $\overline{V_j}$ est l'adhérence de V_j . (propriété de densité)
3. $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap V_j = \{0\}$
4. $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$ (propriété de translation)
5. $\forall j \in \mathbb{Z}, f \in V_j \leftrightarrow f(t/2) \in V_{j+1}$ (propriété de dilatation)
6. Il existe une fonction $\phi \in V_0$ (appelée **fonction d'échelle** ou ondelette père) telle que $(\phi(t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormale de V_0 .

Remarque 6.1

- La propriété de translation est une conséquence directe de l'existence de la fonction d'échelle et de la propriété de dilatation.
- On dit que l'analyse multirésolution est r -régulière si la fonction d'échelle ϕ appartient à C^r et les fonctions $\phi, \phi', \dots, \phi^{(r)}$ sont à décroissance rapide (i.e. $\forall m \in \mathbb{N}, \exists c > 0$ tel que $|\phi(x)| \leq \frac{c}{(1+|x|)^m}$)
- D'après la définition, construire une analyse multirésolution (AMR) permet de calculer des projections successives d'un signal sur des espaces de plus en plus petits.
- D'après la propriété de dilatation, on passe de V_j à V_{j+1} en multipliant par 2 le facteur d'échelle. On dit alors que j correspond au **niveau de résolution**.

6. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

- Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, les fonctions $(2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale de V_j .

Exemple 6.1

Un exemple d'analyse multirésolution est donné par

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ constante sur } \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right] \right\}.$$

On peut vérifier que cet ensemble forme bien une AMR avec comme fonction d'échelle $\phi(t) = \mathbb{1}_{[0,1[}(t)$.

Par construction d'une analyse multirésolution, pour chaque valeur de $j \in \mathbb{Z}$ on sait que $V_j \subset V_{j-1}$. Les V_j sont appelés des **espaces d'approximations**. On introduit alors les **espaces de détails** W_j définis par

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j. \quad (6.1)$$

i.e. W_j est le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j-1} , ce qui signifie que

$$W_j = \{f \in V_{j-1} : \forall g \in V_j \langle f; g \rangle = 0\}. \quad (6.2)$$

Voyons maintenant les propriétés des espaces W_j .

Proposition 6.1

(Propriété des espaces de détails)

- $\forall j \neq l \quad W_j$ est orthogonal à W_l .
- L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est la somme directe des espaces W_j . Ce qui se traduit par

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f,$$

où $Q_j f$ est la projection de f sur le sous-espace W_j .

Démonstration. Montrons d'abord le premier point. Pour cela, nous remarquons que pour $j > l$, on a

$$W_j \subset V_{j-1} \subset \dots \subset V_l,$$

par définition de V_j . Mais W_l est orthogonal à V_l par construction. Il est donc aussi forcément orthogonal à W_j .

Montrons maintenant le second point. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ fixé. On note $P_j f$ la projection de f sur V_j et $Q_j f$ sa projection sur W_j . Alors par construction de V_j et de W_j , on sait que

$$P_j f + Q_j f = P_{j-1} f.$$

En répétant cette opération on voit que pour tout $l < j$ on a

6.2. Construction de bases d'ondelettes

$$P_l f = Q_{l+1} f + Q_{l+2} f + Q_{l+3} f + \dots + Q_j f + P_j f$$

Comme $\lim_{j \rightarrow -\infty} \overline{V_j} = L^2(\mathbb{R})$, en faisant tendre l vers $-\infty$ on a

$$f = \sum_{l=-\infty}^j Q_l f + P_j f$$

mais $\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{V_j} = \{0\}$ donc quand $j \rightarrow \infty$, $P_j f \rightarrow 0$, ce qui démontre le résultat. $\square$

La figure 6.2.1 illustre la décomposition précédente comme un arbre binaire d'espaces d'approximation V_j et d'espaces de détails W_j .

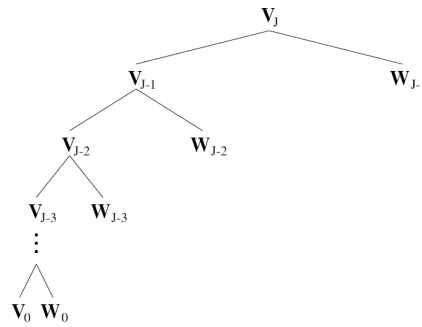


FIGURE 6.2. – Arbre binaire des espaces de décomposition. les V_j représentent les espaces d'approximations et les W_j les espaces de détails.

Le résultat que nous venons de démontrer nous assure que les W_j forment une suite de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$ en somme directe. Autrement dit toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ se décompose de façon unique sous forme de projection sur ces espaces. On peut construire une fonction ψ telle que les $\left(\frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base de W_j . Dans ce cas, la projection d'une fonction f sur W_j s'écrit $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 11 (Base orthogonale d'ondelettes)

La famille des $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$, où $\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{j/2}} \psi(\frac{t}{2^j} - k)$ forme une base orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ et tout signal de $L^2(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

où $d_{j,k} = \langle f; \psi_{j,k} \rangle$.

En s'arrêtant à J fixé, on peut aussi écrire,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{J,k}(t) + \sum_{j \leq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

Dans ce cas, on dit que les c_k sont les coefficients d'approximation à l'échelle J tandis que les $d_{j,k}$ sont les coefficients d'ondelettes correspondant aux détails.

6.2.2. Ondelettes et bancs de filtres

Nous allons voir dans cette partie comment écrire la transformée en ondelettes sous forme de bancs de filtres, ce qui nous permettra de définir l'algorithme de mise en œuvre pratique des ondelettes.

Tout d'abord, remarquons que comme $V_1 \subset V_0$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_0(l) \phi(t-l).$$

Avec $h_0(l) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right); \phi(t-l) \right\rangle$. On peut de la même manière remarquer que quelque soit $j \in \mathbb{Z}$, $V_{j+1} \subset V_j$, ce qui s'interprète par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{j,k}(l) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - l\right). \quad (6.3)$$

De plus,

$$\begin{aligned} h_{j,k}(l) &= \left\langle \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right); \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - l\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2^{j+1/2}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) \phi^*\left(\frac{t}{2^j} - l\right) dt \\ &= \frac{1}{2^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \phi^*(x + 2k - l) dx \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $x = \frac{t}{2^j} - 2k$ dans la dernière équation. Par conséquent, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $h_{j,k}(l) = h_0(l - 2k)$. On interprète la suite des $(h_0[l])_{l \in \mathbb{Z}}$ comme la réponse impulsionnelle d'un filtre discret.

6.2. Construction de bases d'ondelettes

La réponse fréquentielle de ce filtre est alors donnée par $H_0(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_0(l) e^{-2i\pi f l}$. Cette fonction est clairement périodique, de période 1. Elle vérifie aussi :

$$H_0(0) = \sqrt{2}, \quad (6.4)$$

et

$$\forall f \in [0, 1[\quad |H_0(f)|^2 + |H_0(f + 1/2)|^2 = 2. \quad (6.5)$$

En fait ces deux propriétés sont une conséquence de l'orthonormalité de la famille des $\{\phi(t - l); l \in \mathbb{Z}\}$.

On peut raisonner de même pour les espaces de détails W_j . On voit alors que pour $j \in \mathbb{Z}$ fixé, $W_{j+1} \subset V_j$ et

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{2^{\frac{j+1}{2}}} \psi\left(\frac{t}{2^{j+1}} - k\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_1(l - 2k) \frac{1}{2^{\frac{j}{2}}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - l\right). \quad (6.6)$$

Encore une fois h_1 ne dépend pas de l'échelle. C'est la réponse impulsionnelle d'un filtre dont la réponse fréquentielle, périodique, de période 1 vérifie :

$$\forall f \in [0, 1[\quad |H_1(f)|^2 + |H_1(f + 1/2)|^2 = 2. \quad (6.7)$$

et

$$H_1(0) = 0. \quad (6.8)$$

De plus, l'orthogonalité à j fixé entre les $\phi_{j,k}$ et les $\psi_{j,l}$ implique que

$$\forall f \in [0, 1[\quad H_0(f)H_1^*(f) + H_0(f + 1/2)H_1^*(f + 1/2) = 0. \quad (6.9)$$

Ces conditions suggèrent que les filtres h_0 et h_1 sont respectivement des filtres passe-bas et passe-haut.

Nous pouvons de plus déduire de (6.6) que

$$\forall f \in \mathbb{R} \quad \widehat{\psi}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1\left(\frac{f}{2}\right) \Phi\left(\frac{f}{2}\right). \quad (6.10)$$

Avec :

$$H_1(f) = e^{-2i\pi f} H_0^*\left(f + \frac{1}{2}\right).$$

Autrement dit l'ondelette mère ψ se déduit directement de la fonction d'échelle ϕ .

6.2.2.1. Algorithme de Mallat

Considérons un signal $x \in L^2(\mathbb{R})$ fixé. Si nous regardons ce qu'il se passe à l'échelle $j \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$\begin{aligned} P_j x(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_j(k) \phi_{j,k}(t) \\ Q_j x(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j(k) \psi_{j,l}(t) \end{aligned}$$

6. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

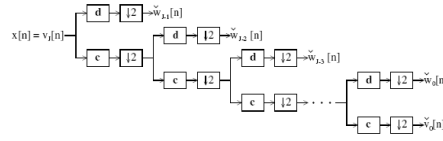


FIGURE 6.3. – Banc de filtres d'ondelettes

avec

$$c_j(k) = \langle x; \phi_{j,k} \rangle$$

$$d_j(k) = \langle x; \psi_{j,k} \rangle$$

Ce qui peut s'écrire grâce à (6.3) et (6.6) comme

$$c_j(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1}(l) h_0^*(l - 2k)$$

$$d_j(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j-1}(l) h_1^*(l - 2k).$$

Donc à partir des coefficients d'approximation à l'échelle $j - 1$, on obtient les coefficients d'approximation et de détails à l'échelle j en utilisant les deux filtres h_0 et h_1 . De plus, on voit que nous n'avons besoin que des termes pairs dans cette opération. Par conséquent, on obtient les coefficients du signal par passage successifs par les filtres h_0 et h_1 et par décimation d'un facteur 2. Cet algorithme en banc de filtres est illustré sur la figure 6.2.2.1

Voyons maintenant comment reconstruire le signal x à partir de ses coefficients, autrement dit comment faire l'opération inverse de la précédente. Comme on a $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ on peut décomposer $\phi_{j,k}$ sur les bases $(\phi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\psi_{j+1,k})_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \phi_{j,p}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j,p}, \phi_{j+1,k} \rangle \phi_{j+1,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j,p}, \psi_{j+1,k} \rangle \psi_{j+1,k}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0[p - 2k] \phi_{j+1,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1[p - 2k] \psi_{j+1,k}(t) \end{aligned}$$

Pour reconstruire le signal, on suréchantillonne d'un facteur 2 les coefficients (en insérant des zéros pour les termes impairs) et on reconstruit

$$c_{j-1}(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_0[p - 2k] c_j(k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_1[p - 2k] d_j(k).$$

6.2.3. Propriétés des ondelettes

La première propriété des ondelettes est que la mère est forcément de moyenne nulle, d'après (6.8). On a de plus le résultat suivant.

Proposition 6.2

Si une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ est r -régulière alors l'ondelette mère associée est C^r et à r moments nuls, i.e.

$$\forall l < r \quad \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0.$$

Démonstration. Par définition, si l'AMR est r régulière, cela signifie que ϕ est C^r . Comme ψ se déduit directement de ϕ grâce à l'équation (6.10). Il nous reste à montrer qu'alors les moments de ψ sont nuls. On démontre ce résultat par récurrence sur r et sur l . Supposons que r soit fixé et que ψ ait $r-2$ moments nuls. Posons alors $x_0 = K2^J$ tel que $\psi^{(r-1)}(x_0) \neq 0$. Alors

$$\frac{1}{2^{J/2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \psi(2^{-J}x - K) dx = 0 \quad (6.11)$$

car les $\psi_{j,k}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Or, la formule de Taylor nous donne

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{r-1} \frac{(x-x_0)^l}{l!} \psi^{(l)}(x_0) + o(|x-x_0|^r).$$

Donc (6.11) devient

$$\frac{1}{2^{J/2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=1}^{r-1} \frac{(x-x_0)^l}{l!} \psi^{(l)}(x_0) + o(|x-x_0|^r) \psi(2^{-J}x - K) dx = 0$$

On pose alors $u = 2^{-J}x - K$. Dans ce cas, $x - x_0 = 2^J u$. Donc

$$2^{J(r-1/2)} \int_{\mathbb{R}} u^{r-1} \frac{\psi^{(r-1)}(x_0)}{(r-1)!} \psi(u) du + o(2^{(r-1)J}) = 0$$

En simplifiant, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} u^{r-1} \psi(u) du + o(2^{-J/2}) = 0.$$

Quand $J \rightarrow \infty$ on obtient bien le résultat. $\square$

Ce résultat est très important. C'est grâce à cela que les ondelettes forment un bon outil pour détecter les singularités dans un signal. En effet, si une ondelette est r régulière, elle est orthogonale à tout polynôme de degré inférieur ou égal à r . Sur les coefficients d'ondelettes, on ne voit alors apparaître que les singularités.

On serait donc tenté d'après les résultats précédents d'utiliser des ondelettes ayant le plus possible de moments nuls. Malheureusement, le résultat suivant atténue ce gain. En effet, il nous dit qu'il y a un choix à faire entre régularité de l'ondelette et taille du support.

Théorème 12 (Daubechies)

Si ψ est une ondelette qui engendre $L^2(\mathbb{R})$ ayant p moments nuls alors son support est de taille supérieure ou égale à $2p - 1$.

Une conséquence importante de ce résultat est qu'on ne peut pas trouver d'ondelettes C^∞ à support compact.

6.2.4. Exemples d'ondelettes

On donne ici quelques exemples d'ondelettes classiques ainsi que leurs intérêts.

6.2.4.1. Ondelette de Haar

Le premier exemple d'ondelettes que nous allons considérer est l'**ondelette de Haar**, créée par Alfred Haar en 1909. C'est la première ondelette ! Celle-ci est construite à partir de l'analyse multirésolution

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}); f \text{ constante sur } [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]\}.$$

munie de la fonction d'échelle $\phi(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$. Dans ce cas, l'ondelette-mère correspondante est donnée par

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ces ondelettes, représentées sur la figure 6.4, sont très bien localisées en temps mais très mal en fréquence, ce sont les ondelettes avec le plus petit support existant. Elles ont de plus peu d'intérêt car elles ne sont pas assez régulières (elles ne sont même pas continues et ont un seul moment nul) mais restent très simple à mettre en oeuvre.

6.2.4.2. Ondelette de Meyer

L'ondelette de Meyer a une transformée de Fourier à support compact. Elle est aussi infiniment dérivable. Cette ondelette se construit en considérant une fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est paire, C^∞ , telle que

$$\hat{\phi}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{si } |f| \geq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

et qui vérifie les propriétés nécessaires pour décrire une fonction d'échelle.

Contrairement à la précédente, cette ondelette (représentée sur la figure 6.5) est très régulière. Malheureusement, son support est lui aussi infini.

6.2. Construction de bases d'ondelettes

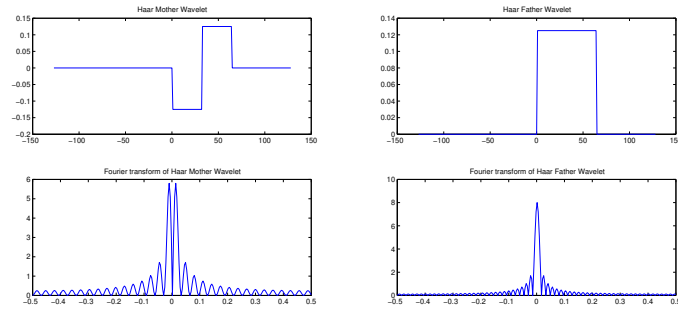


FIGURE 6.4. – Ondelette de Haar et fonction d'échelle associée ainsi que leurs transformées de Fourier.

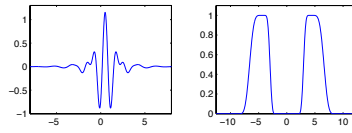


FIGURE 6.5. – Ondelette de Meyer

6.2.4.3. Ondelettes de Battle-Lemarié

Les ondelettes de Battle-Lemarié d'ordre m sont obtenues par orthonormalisation des fonctions B-splines du même ordre. Ces ondelettes ont l'avantage d'avoir une formulation analytique simple, et d'avoir une transformée de Fourier explicite.

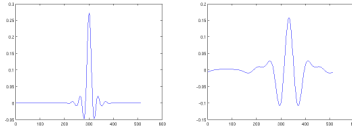


FIGURE 6.6. – Ondelette de Battle-Lemarié à 4 moments nuls : fonction d'échelle et ondelette mère.

6.2.4.4. Ondelette de Coifman

Le principal avantage des ondelettes de Coifman, ou coiflets, est d'avoir une fonction d'échelle qui possède des moments nuls. On peut alors approcher les coefficients d'échelle d'une fonction régulière à partir de ses échantillons. En effet, si $f \in C^k$ sur le support de ϕ_{jn} et sa fonction d'échelle à p moments nuls avec

6. Bases Hilbertiennes : cosinus locaux et ondelettes

$k < p$, alors :

$$2^{j/2} \langle f, \phi_{j,n} \rangle = f(2^j n) + O(2^{(k+1)j}).$$

Ce dernier résultat se montre en faisant un développement de Taylor de f à l'ordre k . Par conséquent, si $j < 0$, et pour $|j|$ assez grand, alors $2^{j/2} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \simeq f(2^j n)$, et on peut alors initialiser l'algorithme de banc de filtres décrit précédemment.

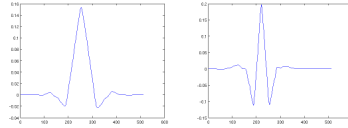


FIGURE 6.7. – La coiflet à 4 moments nuls : fonction d'échelle et ondelette mère.

6.2.4.5. Ondelettes de Daubechies

Avec les exemples précédents, nous pouvons remarquer qu'il y a un certain compromis à faire entre la taille du support de l'ondelette et sa régularité. En particulier, l'ondelette de Meyer est difficile à mettre en oeuvre en pratique.

Les ondelettes de Daubechies sont des ondelettes de support minimal pour un nombre de moments nuls donnés. Autrement dit elles dépendent d'un paramètre N fixé. Elles ont alors N moments nuls et sont à support dans $[-N+1, N]$. Cette ondelette est obtenue de façon constructive, à partir des filtres h_0 et h_1 . Elle est aussi fortement asymétrique. La figure 6.8 représente deux ondelettes de Daubechies.

6.2.5. Ondelettes biorthogonales

Comme nous l'avons vu, le meilleur compromis entre taille du support et moments nuls pour des ondelettes orthogonales est donné par les ondelettes de Daubechies. Malheureusement ces ondelettes sont fortement asymétriques. En fait, la seule ondelette symétrique et à support compact est l'ondelette de Haar. Pour certains problèmes, comme la gestion des bords sur une image, on a pourtant besoin d'utiliser des ondelettes symétriques. Pour cela, on relaxe l'hypothèse d'orthogonalité sur les ondelettes. On définit alors les ondelettes **biorthogonales** comme une généralisation des ondelettes orthogonales. Le principe est de prendre des ondelettes pour la synthèse différentes de celles utilisées pour l'analyse. Nous supprimons alors les conditions d'orthogonalité sur la base $\phi_{j,k}$ de V_j et sur la base $\psi_{j,k}$ de W_j . Nous introduisons les familles duales $\overset{\circ}{\phi}_{j,k}$ et $\overset{\circ}{\psi}_{j,k}$ de $\phi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$ et les espaces $\overset{\circ}{V}_j$ et $\overset{\circ}{W}_j$ engendrés par celles-ci de sorte que :

$$\forall j, k, k' \in \mathbb{Z}, \langle \phi_{j,k}, \overset{\circ}{\psi}_{j,k'} \rangle = \langle \overset{\circ}{\phi}_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle = 0 \iff V_j \perp \overset{\circ}{W}_j, \text{ et } \overset{\circ}{V}_j \perp W_j \quad (6.12)$$

6.2. Construction de bases d'ondelettes

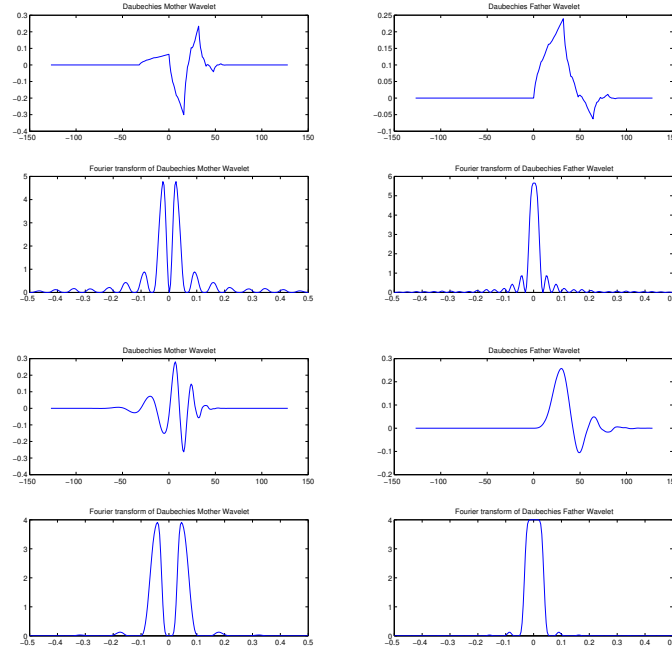


FIGURE 6.8. – Deux exemples d'ondelettes de Daubechies et leur fonction d'échelle associée, ainsi que leur transformée de Fourier. Haut : $N = 2$, bas : $N = 7$

Les familles duales doivent aussi respecter des conditions de biorthogonalité :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \overset{\circ}{\phi}_{j,k'} \rangle &= \delta_{k-k'}, \quad \forall j, k, k' \in \mathbb{Z} \\ \langle \psi_{j,k}, \overset{\circ}{\psi}_{j,k'} \rangle &= \delta_{k-k'}, \quad \forall j, k, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dans ce cadre, les coefficients d'un signal $x \in L^2(\mathbb{R})$ sont donnés par

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \langle x; \phi_{j,k} \rangle \\ d_{j,k} &= \langle x; \psi_{j,k} \rangle \end{aligned} \quad (6.14)$$

Tandis que le signal reconstruit est donné par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{J,k} \overset{\circ}{\phi}_{J,k} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \overset{\circ}{\psi}_{j,k}. \quad (6.15)$$

Pour calculer les coefficients on peut comme dans le cas orthogonal utiliser l'algorithme de Mallat. On changera alors les filtres utilisés à la reconstruction. Pour avoir quand même la reconstruction parfaite du signal, les filtres utilisés à la reconstruction doivent tout de même vérifier certaines hypothèses.

6.2.6. Construction de bases d'ondelettes en dimension supérieure (2D)

L'idée dans cette partie est de construire des bases d'ondelettes séparables. Pour cela, on peut construire une AMR dans chaque direction. On obtient alors une paire (ϕ^1, ψ^1) sur la première coordonnée et une paire (ϕ^2, ψ^2) sur la deuxième. On construit alors l'analyse multirésolution 2D en prenant le produit tensoriel des AMR 1D. Autrement dit, on note $\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$. La suite des espaces $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifie bien les propriétés de l'analyse multirésolution et sa fonction d'échelle est alors donnée par $\phi^1(x_1)\phi^2(x_2)$. En reprenant le raisonnement sur les AMR 1D, on voit qu'on a alors quatre fonctions à considérer :

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) &= \phi(x_1)\phi(x_2) \\ \Psi^1(\vec{x}) &= \phi(x_1)\psi(x_2) \\ \Psi^2(\vec{x}) &= \psi(x_1)\phi(x_2) \\ \Psi^3(\vec{x}) &= \psi(x_1)\psi(x_2)\end{aligned}\tag{6.16}$$

avec $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$

Dans l'équation (6.16), Ψ^1 représente l'ondelette mère de la base des détails verticaux, Ψ^2 les détails horizontaux et Ψ^3 les détails diagonaux.

On a dans ce cas 3 directions de détails. Ce qui nous donne 3 jeux de coefficients d'ondelettes. La reconstruction du signal prend en compte ces trois directions de reconstruction. En effet, soit $x \in L^2(\mathbb{R})$ on a :

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Phi_{J,k} \rangle \Phi_{J,k} + \sum_{i \in \{1,2,3\}} \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i\tag{6.17}$$

Le passage en dimension supérieure se fait exactement de la même façon que le passage de la 1D à la 2D, en prenant des produits tensoriels d'espaces V_j . On obtient alors $2^d - 1$ ondelettes de détails en dimension d .

6.3. Un exemple de transformée en ondelettes

La fonction donnée sur le figure 6.9 est décomposée sur la base d'ondelettes db3, i.e. ondelettes de Daubechies à 3 moments nuls. Pour l'initialisation, on identifie les coefficients a_0 aux échantillons de la fonction.

Chaque passe de filtrage décompose les coefficients a_n en coefficients d_{n+1} d'ondelettes et a_{n+1} de fonctions d'échelles de tailles deux fois plus grande. Comme les ondelettes utilisées ont 3 moments nuls, les parties de la fonction linéaire ou paraboliques donnent des coefficients d'ondelettes exactement nuls.

Les coefficients étant sous-échantillonnés à chaque étape, le nombre de total de coefficients reste constant. On s'arrête après un nombre fixé d'itérations, ou jusqu'à épuisement du signal, quand a_N ne compte plus qu'un coefficient.

6.3. Un exemple de transformée en ondelettes

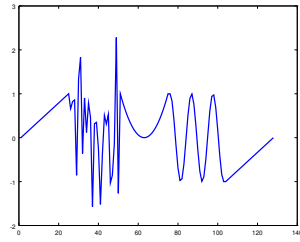


FIGURE 6.9. – Fonction à analyser.

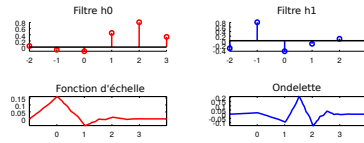


FIGURE 6.10. – Fonction d'échelle et ondelette de Daubechies à 3 moments nuls.

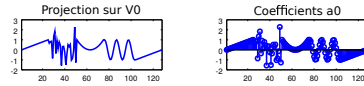


FIGURE 6.11. – Initialisation : on identifie les coefficients a_0 aux échantillons de la fonction.

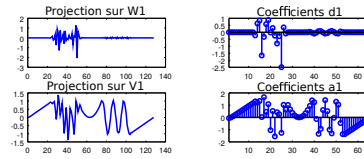


FIGURE 6.12. – Première passe : la fonction est décomposée sur une base de V_1 (fonctions d'échelle) et W_1 (ondelettes).

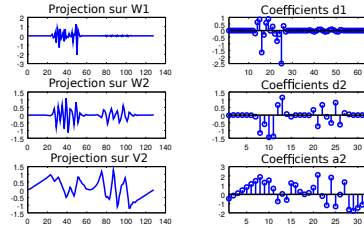


FIGURE 6.13. – Deuxième passe : la projection sur V_1 est décomposée sur une base de V_2 (fonctions d'échelle) et W_2 (ondelettes).

7

■ Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

7.1. Approximation linéaire

Approcher linéairement une fonction consiste à la projeter orthogonalement dans un espace de dimension fini fixé a priori. Cette espace peut être, par exemple, l'ensemble des atomes temps-fréquence pris jusqu'à une fréquence fixée, où des ondelettes d'échelle plus grande qu'un seuil fixé.

Étant donnée une base orthogonale (e_n) de L^2 , on peut approximer une fonction f par la somme finie

$$f_N = \sum_{n=0}^{N-1} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

L'erreur d'approximation $\varepsilon(N, F)$ est définie par

$$\varepsilon(N, F) = \|f - f_N\|^2 = \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

Le fait que f soit dans L^2 implique que l'erreur d'approximation $\varepsilon(N, F)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Cependant, cette décroissance de l'erreur peut-être très lente, trop lente pour que l'approximation de fonctions de L^2 soit utilisable en pratique.

Pour assurer une convergence plus rapide de l'approximation, des a priori sont nécessaires sur les signaux, en particulier sur la vitesse de décroissance des coefficients $\langle f, e_n \rangle$.

On peut en particulier démontrer le théorème suivant :

Théorème 13

Soit $s > 1/2$. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |n|^{2s} |\langle f, e_n \rangle|^2 < +\infty$, alors $\varepsilon(N, F) = o(N^{-2s})$.

7. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

La section suivante caractérise les fonctions vérifiant cette hypothèse quand la base est une base de Fourier ou d'ondelettes.

7.1.1. Approximation dans les espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev H^p sont des sous-ensembles de L^2 caractérisant la régularité d'une fonction. Ils sont définis comme l'ensemble des fonctions f telles que $f \in L^2$, ainsi que ses dérivées $f^{(n)}$ d'ordre $n \leq p$.

Pour éviter les problèmes de bords, on se limite aux fonctions à support dans $[a, b]$, avec $0 < a < b < 1$. De telles fonctions peuvent être décomposées sur la base des atomes de Fourier $e_n(t) = e^{i2\pi nt}$. Les coefficients de cette décomposition sont donnés par

$$f_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi nt} dt.$$

En intégrant par parties, on montre que les coefficients $f_n^{(1)}$ de la dérivée de f sont donnés par

$$f_n^{(1)} = i2\pi n f_n.$$

Plus généralement, les coefficients de $f^{(p)}$ sont donnés par

$$f_n^{(p)} = (i2\pi n)^p f_n.$$

L'appartenance à l'espace de Sobolev H^p implique que $f^{(p)} \in L^2$, et donc que

$$\|f^{(p)}\|^2 = (2\pi)^{2p} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2p} |\langle f, e_n \rangle| \right|^2 < +\infty.$$

En appliquant le théorème 13, on montre que si une fonction à support sur $[a, b]$ est dans H^p , l'erreur $\varepsilon(N, F)$ de son approximation par les N premiers atomes de Fourier décroît plus vite que N^{-2p} .

On démontre un résultat analogue pour les ondelettes : si f est dans H^p et que ψ a au moins $p + 1$ moments nuls, alors l'approximation de f par une base d'ondelettes décroît plus vite que N^{-2p} .

7.1.2. Base de Karhunen-Loève

On suppose maintenant que les signaux à approximer sont des réalisations d'un processus aléatoire connu. On se limitera dans cette partie à des signaux $x = (x_n)_n$ de taille finie N , et d'espérance nulle ($E(x_n) = 0$, si ce n'est pas vérifié, il suffit de soustraire cette espérance aux signaux pour se ramener à ce cas). La matrice de covariance R est supposée connue, de coefficients

$$R_{nm} = E(x_n x_m).$$

La base de Karhunen-Loève est définie comme la base des vecteurs propres $(g_n)_n$ de R classés par valeurs propres λ_n décroissantes.

7.1. Approximation linéaire

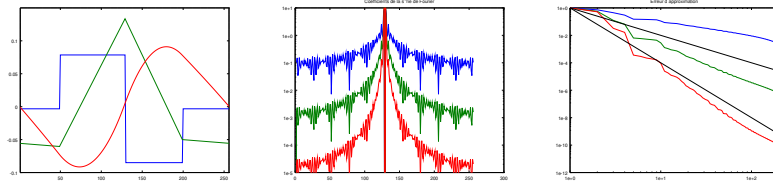


FIGURE 7.1. – 3 fonctions, dans $H^0 = L^2$, H^1 et H^2 , leurs coefficients dans la base de Fourier, ainsi que l'erreur d'approximation en fonction du nombre de vecteurs de la base retenus. Noter la décroissance des coefficients plus rapide pour les fonctions régulières. L'erreur d'approximation décroît plus vite que N^{-2} et N^{-4} pour les fonctions de H^1 et H^2

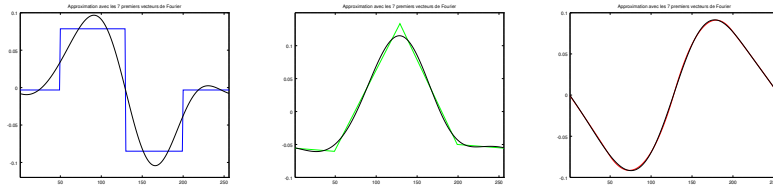


FIGURE 7.2. – Approximation des fonctions avec 7 vecteurs de la base de Fourier.

Théorème 14

L'espérance de l'erreur d'approximation par une combinaison de M vecteurs est minimisée en choisissant les M premiers vecteurs de la base de Karhunen-Loève.

L'espérance de l'erreur d'approximation est alors donnée par

$$\begin{aligned}\varepsilon(M, x) &= E \left(\sum_{n=M}^{N-1} |\langle x, g_n \rangle|^2 \right) \\ &= E \left(\sum_{n=M}^{N-1} (g_n^* x)(g_n^* x)^* \right) \\ &= \sum_{n=M}^{N-1} g_n^* E(x x^*) g_n \\ &= \sum_{n=M}^{N-1} g_n^* R g_n \\ &= \sum_{n=M}^{N-1} \lambda_n.\end{aligned}$$

Classer les vecteurs propres g_n par valeurs propres décroissantes permet de garantir que l'espérance de l'erreur est minimale.

7.2. Approximation non linéaire

Pour les approximations linéaires, le choix des vecteurs de la base utilisés pour approximer le signal dépendait de l'espace dans lequel le signal vivait, ou du modèle probabiliste dont il est une réalisation, mais était indépendant du signal en lui-même.

Dans les approximations non linéaires, le choix du sous-espace dans lequel le signal est projeté est adaptatif, c'est à dire qu'il sera dépendant du signal lui-même.

Étant donné une première approximation linéaire $x_M = \sum_{n=0}^{M-1} \langle x, g_n \rangle g_n$ d'un signal (avec M grand), l'erreur d'approximation entre x_M et x_Λ est définie par

$$x_\Lambda = \sum_{n \in \Lambda} \langle x, g_n \rangle g_n,$$

où Λ est un ensemble de L indices compris entre 0 et $M-1$, s'écrit

$$\varepsilon(\Lambda, x) = \|x - x_\Lambda\|^2 \quad (7.1)$$

$$= \sum_{n \notin \Lambda} |\langle x, g_n \rangle|^2. \quad (7.2)$$

Ainsi, pour minimiser l'erreur d'approximation non-linéaire de x par une combinaison linéaire de L vecteurs, il faut conserver les L plus grands coefficients en valeur absolue.

7.2.1. Approximation non linéaire dans une base d'ondelettes

Les espaces de Sobolev sont les espaces naturels pour caractériser l'approximation linéaire de signaux dans des bases de type Fourier ou d'ondelettes. Pour l'approximation non linéaire par ondelettes, les espaces naturels sont les espaces de Besov :

Définition 7.1

Soit $0 < p, q \leq \infty$ et $s > 0$ donnés. Soit $(\psi_{j,k})_{j,k}$ une base d'ondelettes de $L^2([0, 1]^d)$. On dit qu'une fonction f appartient à l'espace de Besov $B_p^{s,q}([0, 1]^d)$ si et seulement si

$$\|f\|_{B_p^{s,q}}^q = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j-1\}^d} |d_{j,k}|^p 2^{-j(ps-d+pd/2)} \right)^{p/q} < \infty. \quad (7.3)$$

Ces espaces dépendent donc de 3 indices, p , q et s . Pour p et q plus grands que 1, l'espace de Besov correspondant est un espace vectoriel normé (ce qui n'est plus le cas si l'un de ces indices est plus petit que 1). Ils définissent une famille d'espaces fonctionnels liés à la décomposition en temps-fréquence donnée par les ondelettes. Une autre façon de voir l'appartenance d'une fonction f à un espace de Besov $B_p^{s,q}$ est de remarquer que si $f = \sum d_{j,k} \psi_{j,k}$, $f \in B_p^{s,q}$ si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_j)_j$ dans ℓ^q telle que

$$\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j-1\}^d} |d_{j,k}|^p = 2^{j(ps-d+pd/2)} \varepsilon_j^p. \quad (7.4)$$

Dans cette définition, le paramètre $s > 0$ correspond à la régularité de la fonction tandis que le paramètre p correspond à l'espace ℓ^p dans lequel vivent les coefficients. Le paramètre q correspond à un raffinement, on prendra souvent $q = \infty$ dans la suite.

Remarque 7.1

- Un espace de Besov ne dépend pas de l'ondelette choisie, à condition que celle ci soit r régulière, avec $r > s$.
- Pour $p = q = \infty$ L'espace de Besov $B_\infty^{s,\infty}$ correspond à l'espace C^s des fonctions s régulières par morceaux.
- Pour $p = q = 2$ L'espace de Besov $B_2^{s,2}$ correspond à l'espace de Sobolev H^s des fonctions s régulières dans L^2 .

L'intérêt pratique d'utiliser des espaces de Besov est donné par deux résultats. Le premier est qu'il permet de lier l'approximation d'une fonction par des ondelettes à sa régularité.

Proposition 7.1

Si une fonction f appartient à $B_p^{s,q}$, son approximation par ses M premiers coefficients $\sum_{j \leq -\log_2 M} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \psi_{j,k}$ vérifie

$$\|f - f_M\|_p^2 = o(M^{-2s}). \quad (7.5)$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe de l'équation (7.4). $\square$

En ce qui nous concerne, on s'intéresse plus à la norme L^2 de l'erreur qu'à sa norme L^p . Pour passer de l'une à l'autre, on peut cependant utiliser les théorèmes d'injection entre les différents espaces de Besov.

Théorème 15

Soient $0 < p \leq \infty$ et $s > 0$ fixés. Alors

$$\begin{aligned} B_p^{s,q}([0,1]^d) &\hookrightarrow B_2^{s,q}([0,1]^d) \text{ si } p \geq 2 \\ B_p^{s,q}([0,1]^d) &\hookrightarrow B_2^{s',q}([0,1]^d) \text{ où } s' = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{2} \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (7.6)$$

La notation $X \hookrightarrow Y$ signifie que $X \subset Y$, et qu'il existe une constante c telle que $\forall x \in X, \|x\|_Y \leq c\|x\|_X$.

Le deuxième intérêt des espaces de Besov est donné par l'application au traitement d'images. En effet, on considère souvent qu'une "image naturelle" est la donnée de fonctions à variations bornées. Or l'espace des fonctions à variation bornée est lié aux espaces de Besov via le résultat suivant

$$B_1^{1,1} \hookrightarrow BV \hookrightarrow B_1^{1,\infty}, \quad (7.7)$$

la norme de BV étant définie par

$$\|f\|_{BV} = \int |f'(t)| dt.$$

7.3. Estimation

On verra ici comment utiliser les bases d'ondelettes (ou MDCT) pour débruiter un signal ou une image. Le problème d'estimation qu'on se pose ici est celui donné par le modèle du bruit blanc linéaire. Autrement dit on considère que le vecteur d'observations $y \in \mathbb{R}^N$ correspond à :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad y_i = x_i + b_i, \quad (7.8)$$

où $x_i = f(t_i)$ est la source à estimer, $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $b = (b_i)_{i=1, \dots, N}$ est un bruit blanc gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On parle souvent d'un problème non paramétrique car l'objet à estimer f est une fonction, elle vit donc dans un espace de dimension infinie.

On cherche à estimer f ou au moins $x \in \mathbb{R}^N$ à partir de y . Pour cela on considère un opérateur de décision D et on construit un estimateur de x à partir des données y de la forme $\hat{x} = Dy$. Le but est alors de choisir D de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre x et $\hat{x}$,

$$r(D, x) = \mathbb{E}(\|\hat{x} - x\|^2). \quad (7.9)$$

Classiquement dans ce cas de figure, on utilise toute l'information disponible sur x ou f pour améliorer les performances de l'estimation. C'est pourquoi souvent un estimateur bayésien va être performant si l'information qu'on possède *a priori* est suffisamment complète et si elle est facilement modélisable par une densité de probabilité. Dans le cas contraire, on peut aussi modéliser le peu d'information qu'on possède par des critères d'appartenance à des espaces fonctionnels (on approfondira ce point plus tard).

7.3.1. Estimateurs de Wiener

Dans ce paragraphe on va s'intéresser plus particulièrement aux estimateurs linéaires de x , les plus simples à calculer. On considère donc $\hat{x} = \alpha y$ où α est une matrice de paramètres. Le but est donc de trouver $\alpha \in \mathcal{M}_{N \times N}$ qui minimise l'erreur quadratique moyenne. On appelle alors l'estimateur associé *estimateur de Wiener*. Dans ce cas on a la proposition suivante.

Proposition 7.2

Un estimateur linéaire $\hat{x}$ est un estimateur de Wiener si et seulement si

$$\mathbb{E}((x_n - \hat{x}_n)y_k) = 0 \quad \forall 0 \leq k, n < N. \quad (7.10)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^N$ fixé. On considère un estimateur linéaire $\hat{x} = \alpha y$ de x et on détermine le risque de cet estimateur en x :

$$\begin{aligned} r(D, x) &= \mathbb{E}(\|\hat{x} - x\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N |\hat{x}_i - x_i|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \left|\sum_{k=1}^N \alpha_{i,k} y_k - x_i\right|^2\right) \end{aligned}$$

C'est une forme quadratique dont le minimum est atteint si et seulement si $\frac{\partial r(D, x)}{\partial \alpha_{n,k}} = 0$ quelque soit n et k , ce qui donne le résultat. $\square$

Si le signal et le bruit sont stationnaires, leurs matrices de covariance R_x et R_b sont diagonales dans la base de Fourier. On peut alors calculer la densité spectrale de puissance des deux signaux $P_x(\omega)$ et $P_b(\omega)$, qui sont les transformées de Fourier de l'autocovariance de x et b définie par $c_x(k) = E(x_n x_{n-k})$. Le filtre de Wiener s'écrit, en Fourier,

$$\forall 1 \leq k, n \leq N \quad \hat{h}(\omega) = \frac{P_x(\omega)}{P_x(\omega) + P_b(\omega)}.$$

C'est l'estimateur linéaire qui minimise l'erreur quadratique moyenne en x . Malheureusement il n'est optimal que si x est un vecteur gaussien. De plus il suppose qu'on connaît la covariance de x ce qui n'est pas réaliste en pratique.

Dans le cas général il faut pouvoir définir un estimateur qui ne dépende que des données y . De plus l'opérateur de risque considéré $r(D, x)$ dépend lui aussi de x . Comment déterminer un optimum pour ce risque si on ne connaît pas x ? C'est pour répondre à cette dernière question qu'on a défini le risque minimax.

7.3.2. Risque minimax

L'erreur quadratique moyenne définie précédemment dépend de l'inconnue x à estimer. En règle général on ne connaît pas f et donc x , il est donc difficile de comparer en toute généralité différentes méthodes d'estimation à partir de cet erreur. Dans un cadre paramétrique, où on chercherait à estimer x par un estimateur sans biais, on peut utiliser les bornes de Cramer-Rao. Si on veut estimer directement f il n'existe pas d'équivalent de cette borne. Cependant si f en elle même n'est pas connue on possède souvent un minimum d'information liée au problème, comme des informations de régularité. On peut modéliser cette information comme l'appartenance à un espace fonctionnel Θ . On cherchera alors à déterminer le processus de décision D donnant la meilleure estimation sur Θ . Une façon de faire est de considérer encore une fois l'erreur quadratique moyenne

$$r(D, f) = E(\|Dy - f\|^2), \quad (7.11)$$

et de chercher D tel que cette quantité soit minimale pour tout $f \in \Theta$ (souvent par abus de notation on dira que $x = f(t) \in \Theta$). Malheureusement écrit comme ça, cette quantité est impossible à quantifier. Chercher à déterminer une méthode d'estimation efficace pour toutes les fonctions f (dans un espace de dimension infinie) est mission impossible. C'est pourquoi on cherche un critère plus facilement quantifiable. On choisit alors de considérer le pire comportement sur cet espace. C'est pourquoi on définit

$$r(D) = \sup_{f \in \Theta} r(D, f). \quad (7.12)$$

7. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

La meilleure méthode d'estimation sera alors celle qui minimisera ce risque sur Θ , c'est ce qu'on appelle le risque minimax

$$r = \inf_D \sup_{f \in \Theta} r(D, f). \quad (7.13)$$

Pour des raisons évidentes, on note souvent ce risque minimax sur Θ , $r(N, \Theta)$. Tout comme l'estimateur bayésien, il est souvent difficile à calculer en pratique puisqu'il faut déterminer un infimum sur toutes les procédures d'estimation portant, encore une fois, sur un espace fonctionnel. C'est pourquoi une approche classique est de décomposer cet espace fonctionnel à l'aide d'une base, type Fourier ou temps fréquence, et de ne considérer que les opérateurs diagonaux dans cette base.

Avant d'aller plus loin dans l'estimation minimax, on va définir certaines méthodes d'estimation classique. Pour cela on se place dans le cadre d'une décomposition temps-fréquence de l'espace L^2 . L'utilisation de ces décompositions temps-fréquence permet souvent d'avoir une représentation plus parcimonieuse du signal et, comme on le verra par la suite, de meilleures qualités d'estimation.

7.3.3. Estimation dans une base de L^2

7.3.3.1. Le problème d'estimation dans une base

Pour des raisons pratiques, dans cette partie on va tout définir dans un cadre de décomposition en ondelettes. Cependant les définitions et résultats présentés sont similaires pour n'importe quelle représentation temps-fréquence. Rappelons tout d'abord le problème considéré :

$$\forall i = 1, \dots, N \quad y_i = x_i + b_i,$$

où $x_i = f(t_i)$, $t_i \in [0, 1]^d$ et f est une fonction L^2 inconnue. Pour déterminer un estimateur de f il est logique d'utiliser une décomposition dans une base hilbertienne, qui permettra de calculer des coefficients.

Proposition 7.3

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne. Alors résoudre le problème (7.8) revient à résoudre le problème suivant

$$\forall j \in I \quad y_j = f_j + w_j, \quad (7.14)$$

où $(w_j)_{j \in I}$ est un bruit blanc.

Démonstration. On considère le problème (7.8) écrit sous sa forme générale

$$Y = f + B, \quad (7.15)$$

où $f \in L^2([0, 1]^d)$, $Y \in L^2([0, 1]^d)$ et $B \in L^2([0, 1]^d)$ est un bruit blanc gaussien dans $L^2([0, 1]^d)$. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne on peut calculer pour tout $j \in I$, $y_j = \langle Y, e_j \rangle$. Dans ce cas, d'après (7.15) on a pour tout $j \in I$,

$$y_j = \langle Y, e_j \rangle = \langle f + B, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle + \langle B, e_j \rangle. \quad (7.16)$$

Comme $f = \sum_{j \in I} \langle f, e_j \rangle e_j$, on peut caractériser complètement f à partir de sa décomposition. Trouver f revient à trouver la suite $(f_j)_{j \in I}$. Il reste à prouver que si B est un bruit blanc gaussien il en est de même pour la suite $(b_j)_{j \in I}$ définie par $b_j = \langle B, e_j \rangle$. Il reste donc à montrer que $(b_j)_{j \in I}$ forme un bruit blanc gaussien. Tout d'abord, comme $b_j = \langle B, e_j \rangle = \sum_{i=1}^N w_i e_j(t_i)$, sa loi est évidemment gaussienne. De plus, si on regarde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(b_k b_j) &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N w_i w_l e_k(t_i) e_j(t_l) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbb{E}(w_i w_l) e_k(t_i) e_j(t_l) = \sum_{i=1}^N \sigma^2 e_k(t_i) e_j(t_i) \\ &= \sigma^2 \delta(k - j). \end{aligned}$$

Donc la suite $(b_j)_{j \in I}$ forme bien un bruit blanc gaussien. $\square$

Regardons maintenant les estimateurs que l'on peut construire, à l'aide d'une décomposition en ondelettes. On s'intéressera uniquement ici à des estimateurs dits diagonaux dans le sens où on cherche $\hat{f}_j = \theta_j(y_j) y_j$, pour tout $j \in I$ (autrement dit l'estimation se fait coefficient par coefficient).

7.3.3.2. Construction des estimateurs

Estimation par projection Dans un premier temps, on va regarder la façon la plus simple de construire un estimateur, autrement dit les estimateurs linéaires. Encore une fois, le but est de trouver la suite $(\hat{f}_j)_{j \in I}$ de la forme $\forall j \in I, \hat{f}_j = \theta_j y_j$ qui minimise $r(f) = \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2)$. Pour l'instant on écrira ce risque comme une fonction de f .

L'estimateur le plus simple à écrire est l'estimateur par projection. Il consiste à regarder la projection de Y sur le sous espace engendré par les M premiers vecteurs de la base $(V_M$ dans le cas des ondelettes). Dans ce cas, on prend

$$\hat{f}_j = \mathbb{1}_{\{j \leq M\}} y_j, \quad \forall j \in I. \quad (7.17)$$

7. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

L'erreur obtenue est dans ce cas

$$\begin{aligned}
 r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{j \leq M\}} y_j - f_j|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{j \leq M\}} (f_j + b_j) - f_j|^2\right) \\
 &= \sum_{i=1}^M \mathbb{E}(b_i^2) + \sum_{j>M} |f_j|^2 \\
 &= M\sigma^2 + \sum_{j>M} |f_j|^2.
 \end{aligned}$$

On a deux termes qui apparaissent dans cette somme. Le terme de biais $\sum_{j>M} |f_j|^2$ correspondant à l'erreur L^2 commise en approchant f par ses M premières composantes de la base et le terme de variance $M\sigma^2$. On obtient alors

Estimation par oracle Comme dans le cas paramétrique les estimateurs linéaires, bien que plus facile à construire, sont souvent moins performants en pratique. Une autre technique d'estimation populaire consiste à estimer la fonction f à l'aide d'un seuillage. L'idée est, étant donné une représentation parcimonieuse d'un signal ou d'une image, si peu de coefficients portent le maximum d'information, les coefficients petits doivent correspondre au bruit.

Définition 7.2

Soit $T > 0$ un seuil fixé. On appelle estimateur de f par oracle l'estimateur défini par

$$\hat{f}_j = \mathbb{1}_{\{|f_j|>T\}} y_j, \quad \forall j \in I. \quad (7.18)$$

On parle d'estimation par oracle car on fait dépendre l'estimateur de la fonction f que l'on cherche à estimer. Dans ce cas, la valeur optimale du seuil correspond à $T = \sigma$, i.e. on ne garde que les coefficients de f qui sont au dessus du bruit.

Comme dans le cas linéaire, pour $f \in L^2$ fixé le risque de cet estimateur est donné par

$$\begin{aligned}
 r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|f_j|>\sigma\}} y_j - f_j|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|f_j|>\sigma\}} (f_j + b_j) - f_j|^2\right) \\
 &= \sum_{i \in I; |f_i|>\sigma} \mathbb{E}(b_i^2) + \sum_{i \in I; |f_i| \leq \sigma} |f_i|^2 = \sum \min(\sigma^2; |f_j|^2).
 \end{aligned}$$

Si on réordonne les f_j suivant l'ordre décroissant de leur puissance, on obtient

une valeur M telle que les M derniers termes soient inférieurs à T . On obtient alors

$$r(f) = M\sigma^2 + \sum_{j>M} |f_j|^2.$$

Encore une fois cette erreur dépend de l'approximation de f par M termes dans la décomposition considérée. Cette fois ci l'approximation est non linéaire puisqu'elle nécessite d'abord un réarrangement des coefficients.

Estimation par seuillage Dans la définition précédente, l'estimation construite dépendait de la valeur de f ce qui n'est pas réaliste en pratique. Une autre façon de construire un estimateur est alors de faire dépendre l'estimateur des données et non du signal qu'on cherche à estimer.

Définition 7.3

Soit $T > 0$ un seuil fixé. On appelle estimateur de f par seuillage dur l'estimateur défini par

$$\hat{f}_j = \mathbb{1}_{\{|y_j|>T\}} y_j, \quad \forall j \in I. \quad (7.19)$$

La construction est donc la même que la précédente mais cette fois ci les poids d'estimation dépendent uniquement des données. Cet estimateur est appelé seuillage dur car il met à zéro tous les coefficients petits et ne touche pas aux autres. Il est souvent opposé au seuillage doux qu'on verra par la suite.

En ce qui concerne le risque de cet estimateur on a

$$\begin{aligned} r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|y_j|>T\}} y_j - f_j|^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\mathbb{1}_{\{|y_j|>T\}} (f_j + b_j) - f_j|^2\right) \end{aligned}$$

Remarquons que la connaissance de f réduit le risque. Dit autrement, si $|f_j| < T$ on a forcément que $|y_j| = |f_j + b_j| \leq T$. Donc le risque par seuillage est plus grand que le risque par oracle.

Estimation par seuillage doux Comme nous l'avons vu, le seuillage dur ne touche pas aux coefficients au dessus du seuil T . Si ceux ci sont corrompus par le bruit, on ne touche pas à cette corruption. Le principe du seuillage doux est d'atténuer tous les coefficients afin de supprimer aussi le bruit dans les coefficients grands. Dans une base d'ondelettes, cette opération revient à faire un lissage adaptatif des observations.

Définition 7.4

Soit $T > 0$ un seuil fixé. On appelle estimateur de f par seuillage doux l'estima-

7. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

teur défini par

$$\hat{f}_j = (|y_j| - T)_+, \quad \forall j \in I. \quad (7.20)$$

Regardons l'erreur obtenue avec cet estimateur.

$$\begin{aligned} r(f) &= \mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} |\hat{f}_j - f_j|^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} (|y_j| - T)_+ - f_j\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j \in I} \mathbb{1}_{\{|y_j| > T\}} (f_j + b_j - T) - f_j\right)^2 \end{aligned}$$

Encore une fois ce risque est supérieur au risque obtenu par une estimation par oracle et dépend du seuil T choisi.

Dans tous les estimateurs qui précèdent, l'erreur d'estimation était liée au niveau de bruit ainsi qu'à l'approximation du signal par M coefficients, que ce soit de façon linéaire dans le cas de l'estimation par projection ou par une approximation non linéaire dans le cas des estimateurs par seuillage. Pour déterminer le risque minimax d'un estimateur on doit donc avoir une idée du comportement de cette approximation.

7.3.4. Estimation minimax dans un espace de Besov

Cette partie se décompose en deux sous-parties. Tout d'abord nous allons donner des résultats généraux sur les risques minimax dans un espace de Besov donné et dans un second temps, nous reviendrons sur les estimateurs, par projection ou par seuillage, définis précédemment. Nous verrons alors pour quelles valeurs des différents paramètres M ou T ces estimateurs sont optimaux.

7.3.4.1. Estimation minimax dans $B_p^{s,\infty}$

Le risque minimax que l'on peut obtenir avec N observations d'un signal corrompu par un bruit blanc gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est donné par la proposition suivante.

Proposition 7.4

Soit $1 \leq p < \infty$ et $s > \frac{d}{p}$. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$r(B_p^{s,\infty}) \sim \inf_{\hat{f}_n} \sup_{f \in B_p^{s,\infty}} \mathbb{E} \|\hat{f}_n - f\|^2 \geq Cr(s, p)$$

où

$$r(s, p) = \begin{cases} (\sigma^2)^{\frac{2s}{2s+d}} & \text{si } p > \frac{2}{2s+d}, \\ (\sigma^2)^{\frac{2(s-\frac{d}{p}+\frac{d}{2})}{2(s-\frac{d}{p})+d}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration de cette proposition se base sur l'optimalité de l'estimation bayésienne. On peut cependant remarquer sur le résultat qu'il y a deux zones suivant les valeurs de p et de s . La première zone est la zone régulière tandis que la deuxième privilégie des représentations parcimonieuses. Pour chaque classe d'estimateur, on cherche à comparer le risque optimal obtenu avec la méthode (en fonction des paramètres) avec cette vitesse minimax. Nous allons voir dans la suite que les estimateurs linéaires sont optimaux au sens minimax dans la première zone mais plus du tout dans la deuxième.

7.3.4.2. Estimateurs par ondelettes dans un espace de Besov

Reprenons les risques des méthodes d'estimation données précédemment.

7.3.4.3. Estimateur par projection

Dans le cas de l'estimateur par projection on avait obtenu un risque de la forme

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) = \sigma^2 M + \sum_{j \geq M} |f_j|^2. \quad (7.21)$$

Autrement dit un terme de biais plus un terme de variance. D'après la proposition 7.1 et le théorème 15 on peut majorer cette erreur par

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) \leq \sigma^2 M^d + M^{-2\tilde{s}}, \quad (7.22)$$

où $\tilde{s} = s$ si $p \geq 2$ et $\tilde{s} = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{2}$ sinon.

La valeur de M optimale est alors celle qui offre le meilleur compromis entre le biais et la variance, autrement dit $M = \sigma^{-\frac{2}{2\tilde{s}+d}}$. Dans ce cas, l'erreur commise est

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) \leq (\sigma^2)^{\frac{2\tilde{s}}{2\tilde{s}+d}}. \quad (7.23)$$

Elle correspond donc à l'erreur minimax pour $p \geq 2$.

7.3.5. Estimateurs par seuillage

Dans cette partie on regarde les valeurs optimales du seuil $T > 0$ utilisé dans le seuillage dur et le seuillage doux. Dans les deux cas la valeur optimale du seuil est donné par $T = \sigma \sqrt{2 \log N}$. Cette valeur correspond à la plus petite valeur de T telle que la probabilité que le maximum du bruit soit inférieur à T tende vers 1 quand $N \rightarrow \infty$.

On peut montrer qu'avec cette valeur du seuil ces estimateurs ont un risque proche de celui d'un estimateur par oracle. Dans le sens où

$$\mathbb{E}(\|\hat{f} - f\|^2) \leq (2 \log N + 1)(\sigma^2 + \sum \min(\sigma^2, |f_i|^2)). \quad (7.24)$$

7. Notions d'approximation et d'estimation d'un signal

Ils sont donc optimaux dans les espaces de Besov à une correction logarithmique près.

Cependant ce seuil est assez grand et est très peu efficace en pratique. Une autre façon de définir un seuil est d'utiliser l'estimation de Stein.

7.3.5.1. Estimateur SURE du seuil pour le seuillage doux

L'estimation précédente du seuil est basée uniquement sur le niveau de bruit et la dimension du signal à estimer. Il paraît d'utiliser également les données disponibles y_i pour estimer ce seuil T .

L'estimation SURE de ce seuil est basée sur une estimation du risque $r(f, T)$ de l'estimateur de seuillage doux pour le seuil T . Ce risque s'écrit

$$r(f, T) = \sum_{j, |y_j| > T} T^2 + \sigma^2 + \sum_{j, |y_j| \leq T} |f_j|^2$$

En notant que

$$E(|y_j|^2) = |f_j|^2 + \sigma^2,$$

on peut estimer $|f_j|^2$ par $|y_j|^2 - \sigma^2$. L'estimateur SURE (Stein Unbiased Risk Estimator) à partir des données y est défini par

$$SURE(y, T) = \sum_{j, |y_j| > T} T^2 + \sigma^2 + \sum_{j, |y_j| \leq T} |y_j|^2 - \sigma^2.$$

Comme son nom l'indique, on peut montrer que c'est un estimateur sans biais du risque $r(f, T)$. Pour estimer le seuil optimal T , on peut calculer $SURE(y, T)$ pour plusieurs valeurs de T , et choisir la valeur T_{opt} qui minimise l'estimation SURE du risque.

7.3.6. Un exemple de seuillage

La fonction f donnée fig 7.3 doit être estimée à partir de son observation bruitée. La fonction étant lisse par morceaux, on la décompose sur une base d'ondelettes (db3), les coefficients d'ondelettes étant significatifs uniquement autour de la discontinuité.

La figure 7.4 donne le résultat des seuillages dur et doux pour le seuil $T = \sigma \sqrt{2 \log N}$. Les résultats de l'estimation SURE du seuil sont donnés figure 7.5. L'estimateur du risque est tracé, ainsi que l'erreur d'estimation réelle (calculée avec la connaissance de f est donc inconnue en pratique). On remarque la bonne concordance entre les deux courbes. La constante noire indique le niveau de bruit. Le seuil estimé sans utilisation des données est dénoté par T .

7.3. Estimation

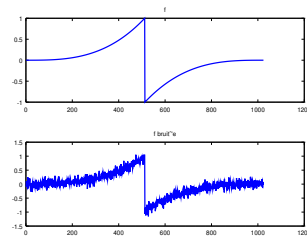


FIGURE 7.3. – Fonction à estimer et son observation bruitée.

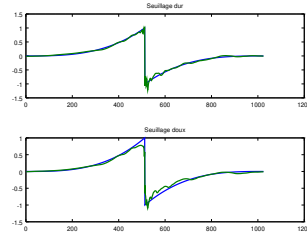


FIGURE 7.4. – Seuillage dur et seuillage doux.

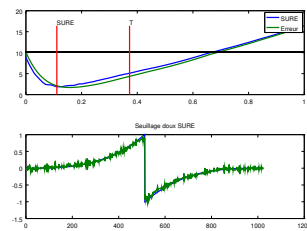


FIGURE 7.5. – Seuillage doux avec estimation SURE du seuil.

8



De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

Construire une base orthormée est un moyen "simple" d'obtenir une version discrète d'une représentation, on a vu par exemple comment construire des bases d'ondelettes et de cosinus locaux. Les bases orthonormées ont aussi des propriétés utiles en terme d'approximation, avec application directe à la compression.

Cependant, l'utilisation d'une base n'est pas toujours l'idéal. Construisons un signal discret particulier, échantillonné à 1Hz, comme la somme d'un dirac et d'un cosinus de fréquence f .

$$x[t] = \delta[t] + \cos[2\pi f t] .$$

Dans la base canonique des échantillons temporels $\{\delta[t - n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\ell_2(\mathbb{Z})$, on a évidemment besoin d'une infinité d'échantillons. Si l'on choisit la base des cosinus discrets, on a aussi besoin d'une infinité d'éléments.

Construisons maintenant le *dictionnaire* d'atomes élémentaires par l'union des deux bases précédentes. Il suffit alors de seulement deux éléments pour reconstruire parfaitement le signal!

Cette *redondance* de l'information peut être utile afin de sélectionner au mieux les atomes, et aider à leur interprétation. On définit ici la notion de repères redondant (ou "frame"), puis on reviendra plus spécifiquement sur les repères de Gabor. Enfin, un étudiera en détail la notion de synthèse dans un dictionnaire et le rôle primordial de la parcimonie.

8.1. Utilisation de la redondance

La construction d'un dictionnaire redondant, est donnée par la notion de *frame*, qui permet une discrétisation stable aussi bien lors de l'analyse que de la synthèse d'un signal.

Définition 8.1

(Frame)

Une famille $\{\varphi_n, \varphi_n \in \mathcal{H}\}$ est un frame de $\mathcal{H}$ s'il existe deux constantes $A, B > 0$

8. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

telles que pour tout $f \in \mathcal{H}$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

Si $A = B$ on dit que la frame est ajustée.

De plus, une frame est une base orthonormée ssi $A = B = 1$ et $\|\varphi_n\| = 1$.

On peut définir deux opérateurs de frame.

- L'opérateur de *synthèse* Φ tel que

$$\Phi \alpha = \sum_k \alpha_k \varphi_k$$

- L'opérateur d'*analyse*

$$\Phi^* f = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}$$

En dimension finie, Φ est une matrice de taille M, N , où M est la dimension du signal, et N le nombre d'atomes qui composent la frame $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N-1}$, avec $\varphi_n \in \mathbb{C}^M$

Lorsque la frame est redondante (ie, n'est pas une base), Il existe une infinité d'inverse à gauche. L'inverse canonique est donnée par la pseudo inverse. On appelle la nouvelle frame obtenue *frame duale*

Proposition 8.1 (frame duale)

Soit $\tilde{\varphi}_n = (\Phi \Phi^*)^{-1} \varphi_n$. Alors

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

et

$$f = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n = \sum \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle \varphi_n$$

Démonstration. $\{\langle f, \varphi_n \rangle\} = \Phi^* f$

$$\begin{aligned} \sum \langle f, \varphi_n \rangle \tilde{\varphi}_n &= \{(\Phi \Phi^*)^{-1} \Phi\} \Phi^* f \\ &= (\Phi \Phi^*)^{-1} \Phi \Phi^* f \\ &= f \end{aligned}$$

□

Lorsque la frame est ajustée (i.e. $A = B$), alors $\Phi \Phi^* = A \text{ Id}$. Lorsque $A = 1$, on dit que la frame est de Parseval (on a conservation de l'énergie dans le domaine transformé). Attention : si la frame est de Parseval et que ce n'est pas une base orthonormée, alors nécessairement $\|\varphi_n\| \neq 1$.

Les bornes de frames A et B sont les plus petites et plus grande valeurs propres de $\Phi \Phi^*$. On obtient $\frac{1}{B}$ et $\frac{1}{A}$ pour $(\Phi \Phi^*)^{-1}$.

Pratiquement, une frame est donc un système de représentation *a priori* redondant, qui permet de reconstruire un signal à partir de ses produits scalaires avec les vecteurs composant la frame. Il faut noter que le calcul de la fenêtre duale n'est pas toujours aisé. Il existe cependant des algorithmes itératifs tels que l'algorithme de Richardson ou le gradient conjugué pour reconstruire le signal.

8.2. Retour sur Gabor

On a vu qu'il n'existe pas de base orthonormée d'atomes de Gabor. Bien qu'on ait construit une base de $L^2(\mathbb{R})$ avec la MDCT, on va voir comment construire une frame de Gabor en *dimension finie* (la construction est bien entendue généralisable en dimension infinie).

Étant donné un signal observé sur un intervalle temporel, sa transformée de Fourier usuelle estime les fréquences le composant mais en perdant l'information temporelle. Afin d'analyser l'évolution du spectre avec le temps, Gabor a introduit les atomes de Fourier à fenêtre et la stft avec des fenêtres gaussiennes. On s'intéresse ici à sa discrétisation, qu'on appelle transformée de Gabor.

La transformée de Fourier à fenêtre reposant essentiellement sur la transformée de Fourier, un moyen simple de la discrétiser est d'utiliser le cadre des signaux discret périodique. Ainsi, si l'on considère $x = \{x[0], \dots, x[T-1]\}$ un signal discret de période T , et une fenêtre $g = \{g[0], \dots, g[L-1]\}$, $L \leq T$, périodique de période T , la transformée de Fourier à court terme s'écrit

$$X[m, k] = \sum_{n=0}^T x[n] g[n-m] e^{-\frac{i2\pi kn}{T}}$$

et peut être inversée directement

$$s[n] = \frac{1}{\|g\|^2} \sum_{m=0}^T \sum_{k=0}^T X[m, k] \tilde{g}[n-m] e^{\frac{i2\pi kn}{T}}.$$

Cependant une telle discrétisation est extrêmement redondante : on obtient T^2 coefficients pour un signal de taille T . Même si la redondance peut-être utile, on aimerait pouvoir jouer sur le recouvrement temporel de deux fenêtres adjacentes, ainsi que sur la résolution de la transformée de Fourier qu'on aimerait par exemple de longueur L ou $2L$ plutôt que T .

On note $f_0 \in \mathbb{N}$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ les taux d'échantillonnage en fréquence et en temps du plan temps-fréquence considérée pour la transformée de Gabor. Soit la famille des translations et des modulations de la fenêtre mère génère une famille d'atomes de Gabor $(\varphi_{mf})_{mf}$ qui forment le dictionnaire $\Phi \in \mathbb{C}^{T \times K}$. Soit K le nombre d'atomes. Les atomes de Gabor s'écrivent :

$$\varphi_{mf}[n] = g[n - mk_0] e^{\frac{i2\pi f_0 f n}{T}}, \quad m \in \{0, \dots, \frac{T}{k_0} - 1\}, f \in \{0, \dots, \frac{T}{f_0} - 1\}.$$

8. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

Si le produit $f_0 k_0$ est "assez petit", plus précisément si $f_0 k_0 < T$, i.e. si le plan temps-fréquence est suffisamment échantillonné, alors la famille $(\varphi_{mf})_{m,f}$ est un frame de $\mathbb{R}^T$

La transformée de Gabor est nécessairement redondante d'après le théorème de Balian-Low. Comme pour toutes les frames qui ne sont pas des bases, il existe donc une infinité de possibilité pour reconstruire $\mathbf{x}$ à partir d'une famille d'atome de Gabor donnée (qui soit bien un frame).

La reconstruction canonique de $\mathbf{x}$ à partir de ses coefficients de Gabor, donnée par le frame inverse canonique, donne une famille d'atome construite à partir d'une fenêtre duale notée $\tilde{\mathbf{g}}$.

$$\mathbf{x} = \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \varphi_{mf} \rangle \tilde{\varphi}_{mf} = \sum_{m,f} \langle \mathbf{x}, \tilde{\varphi}_{mf} \rangle \varphi_{mf} = \Phi^* \mathbf{x} \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^* \mathbf{x} \Phi,$$

où $\tilde{\Phi}$ est le dictionnaire de Gabor construit à partir des fenêtres duales.

Le frame de Gabor peut-être construit de manière à être ajusté. Dans ce cas, on a simplement $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$. Plus particulièrement, on a $\Phi \Phi^* = \|\Phi\|^2 \mathbf{Id}$ ¹.

En pratique, les coefficients de Gabor peuvent être calculés en utilisant la FFT. L'opération de synthèse (et donc la transformée inverse avec la fenêtre duale appropriée) est effectuée à partir de la FFT inverse et des techniques d'ajout-superposition appropriées. Ces opérations d'analyse/synthèse sont efficacement implémentés dans la toolbox MatLab LTFAT².

8.3. Approximation parcimonieuse

Plutôt que de se poser la question

- "Quelle est la meilleure analyse pour un signal d'intérêt?"

on se pose ici la question

- "Comment peut on synthétiser au mieux un signal?"

Le "au mieux" voulant dire avec le moins d'effort possible (en terme de coût de calculs) et de manière satisfaisante au vu du résultat attendu (en terme de débruitage par exemple, ou plus généralement de problème inverse). Avec une base orthonormée, les notions d'analyse et de synthèse sont strictement équivalentes. Dès lors qu'on travaille avec un dictionnaire redondant (ou un frame) la situation devient beaucoup plus riche et subtile : étant donné un dictionnaire sur-complet ($N > M$) $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, on décompose $x \in \mathbb{C}^T$ comme une superposition d'atomes :

$$x = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n$$

Comme $N > T$, il existe une infinité de solution.

1. Il faut noter qu'on ne peut rien dire sur $\Phi^* \Phi$ en général.
2. <http://ltfat.sourceforge.net/>

La première solution "évidente", est la solution donnée par la frame duale : $\alpha_n = \langle f, \tilde{\varphi}_n \rangle$ c'est en fait la solution d'énergie minimale, c'est à dire qui est solution du problème d'optimisation suivant

$$\alpha = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} \|\alpha\|_2 \quad \text{s.t.} \quad x = \sum \alpha_k \varphi_k$$

Cette solution à l'avantage d'être simple et peut coûteuse, mais n'est cependant pas la plus satisfaisante : les N atomes du dictionnaires sont nécessaires pour la re-synthèse de x . Or, l'avantage de l'approche synthèse est de fournir un cadre générique pour introduire des *a priori*, ou des contraintes, dans la représentation cherchée. On précise alors la question en

- Comment synthétiser au mieux un signal en privilégiant un certain comportement de ses coefficients de synthèse?

Ici, on va essentiellement chercher un comportement *parcimonieux*. En effet, la parcimonie à l'avantage de la simplicité : simplicité d'interprétation, mais aussi de stockage de l'information. Si l'on a un budget de K atomes, comment sélectionner ces K atomes tels que l'erreur de reconstruction $\|\sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k - x\|$ soit minimale? Autrement dit, toujours en partant d'une famille complète d'atomes $\{\varphi_n\}$, si l'on se fixe un budget de K atomes, comment sélectionner ces K atomes pour approcher au mieux le signal donné? Ce type d'approximation trouve son application, par exemple, dans la compression des signaux avec perte. Il faut que le maximum d'informations soit dans les premiers coefficients afin d'en stocker le moins possible, et plus généralement dans les applications de problèmes inverses.

Idéalement, on souhaiterait donc résoudre le problème

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \\ \text{s.t.} \quad \|y - \Phi\alpha\| \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{8.1}$$

c'est à dire minimiser le nombre de coefficient tout en contrôlant l'erreur de reconstruction. Ou

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \|y - \Phi\alpha\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad \|\alpha\|_0 = K \end{aligned} \tag{8.2}$$

c'est à dire minimiser l'erreur de reconstruction en se fixant un budget de K atomes.

Dans le cas d'une BON, le problème se résout facilement : il suffit de garder les K plus grand coefficients. On va voir deux approches pour résoudre ce problème dans un frame : une approche gloutonne et une approche variationnelle.

8.3.1. Approche Greedy (Matching Pursuit)

Le matching pursuit est un algorithme glouton visant à résoudre le problème (8.1) (ou (8.2)). A chaque étape, l'algorithme 1 va chercher l'atome le plus corrélé au signal résiduel, pour l'ajouter au signal estimé.

Algorithm 1 – Matching Pursuit

Initialisation : $r^{(0)} = x, x^{(0)} = 0$.

repeat

Recherche de l'élément optimal : à l'étape k , $r^{(k)}$ est connu et on cherche

$$\lambda_k = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} |\langle r, \varphi_\lambda \rangle|$$

Mise à jour de l'approximation au rang k

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k}$$

et du résidu

$$r^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = r^{(k)} - \langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k}$$

until critère d'arrêt

A chaque itération K on a donc

$$x = \sum_{k=0}^{K-1} \langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k} + r^{(K)},$$

et

$$\|r^{(k+1)}\|^2 = \|r^{(k)}\|^2 - |\langle r^{(k)}, \varphi_{\lambda_k} \rangle|^2,$$

De plus,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|r^{(k)}\| = 0$$

Cet algorithme converge en temps infini : un atome peut être sélectionné autant de fois que nécessaire. Afin d'empêcher un atome d'être sélectionné plusieurs fois, il existe une version orthogonale du matching pursuit qu'on donne dans l'algorithme 2. L'idée est de remplacer l'étape de mise à jour du signal par une projection orthogonal sur l'espace engendré par les atomes sélectionnés. L'algorithme converge alors en au plus N itérations, où N est la taille du dictionnaire. Cette version a l'inconvénient d'être bien plus coûteuse en temps de calcul en raison de la matrice de Gram à inverser à chaque itération.

8.3.2. Approche variationnelle

Une approche consiste à construire une fonctionnelle "proche" du problème original (8.1), tout en étant facilement optimisable. On cherche ici une relaxation convexe du problème, la convexité assurant l'existence d'un minimum unique ainsi que l'existence d'algorithmes efficaces. La meilleure relaxation convexe de la pseudo norme ℓ_0 est la norme ℓ_1 . On trouve alors le problème du *Basis Pursuit* (BP) de Chen et Donoho

Algorithm 2 – Matching Pursuit Orthogonal

Initialisation : $r^{(0)} = x, x^{(0)} = 0$.**repeat**Recherche de l'élément optimal : à l'étape k , $r^{(k)}$ est connu et on cherche

$$\lambda_k = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}} |\langle r, \varphi_\lambda \rangle|$$

Mise à jour de l'approximation au rang k

$$x^{(k+1)} = P_{V^k} x = \sum_{k=1}^K \alpha_k \varphi_k$$

avec $\alpha_k = (\Phi_K^* \Phi_K)^{-1} \Phi_K^* x$
et du résidu

$$r^{(k+1)} = x - x^{(k+1)}$$

until critère d'arrêt

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \tag{8.3}$$

$$\text{s.t. } y = \Phi \alpha$$

Lorsqu'on ne souhaite pas une reconsustruction exacte, lors d'un problème de débruitage par exemple, on pose alors le *Basis Pursuit Denoising* (BPDN)

$$\min_{\alpha} \frac{1}{2} \|y - \Phi \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_1. \tag{8.4}$$

Ce problème peut être formulé de manière équivalente comme

$$\min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \tag{8.5}$$

$$\text{s.t. } \|y - \Phi \alpha\|_2^2 \leq \varepsilon$$

ou

$$\min_{\alpha} \|y - \Phi \alpha\| \tag{8.6}$$

$$\text{s.t. } \|\alpha\|_1 \leq \tau$$

C'est sous cette dernière version que Tibshirani a introduit le problème du "LASSO". On appelle aujourd'hui indifféremment problème du LASSO ou Basis Pursuit Denoising les trois versions du problème. Si la version (8.5) semble le plus naturel, le

8. De l'analyse à la synthèse parcimonieuse

paramètre ε étant proportionnel à la variance du bruit, c'est la version (8.4) qui est la plus facile à optimiser numériquement.

Ce problème du LASSO (8.4) peut-être optimiser avec les algorithmes de type "seuillage itératif" ISTA - Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm et FISTA, pour Fast Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm, donnés respectivement dans les algorithmes 3 et 4

Algorithm 3 – ISTA
Initialisation : $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N$, $L = \ \Phi\ ^2$
repeat
$\alpha^{(k+1/2)} = \alpha^{(k)} + \frac{1}{L} \Phi^* (y - \Phi \alpha^{(k)})$
$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k+1/2)} \left(1 - \frac{\lambda/L}{ \alpha^{(k+1/2)} }\right)^+$
until convergence
Algorithm 4 – FISTA
Initialisation : $\alpha^{(0)} \in \mathbb{C}^N$, $\gamma^{(0)} \in \mathbb{C}$, $L = \ \Phi\ ^2$
repeat
$\alpha^{(k+1/2)} = \gamma^{(k)} + \frac{1}{L} \Phi^* (y - \Phi \gamma^{(k)})$
$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k+1/2)} \left(1 - \frac{\lambda/L}{ \alpha^{(k+1/2)} }\right)^+$
$\gamma^{(k+1)} = \alpha^{(k+1)} + \frac{k}{k+5} (\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)})$
until convergence

On développe en annexe B les notions d'optimisation convexe non lisse permettant de résoudre le problème avec ces algorithmes. Ces algorithmes permettent de résoudre de façon général les problèmes du type

$$\mathcal{L}(y, \Phi, \alpha) + \lambda P(\alpha)$$

où

- $\mathcal{L}(y, \Phi, \alpha)$, appelé "attache aux données", permet de relier le signal y aux coefficients de synthèse α dans le dictionnaire Φ . On choisit en général une attache aux données de type ℓ_2 : $\|y - \Phi \alpha\|^2$, mais il existe d'autres type d'attaches aux données.
- $P(\alpha)$ est le terme de régularisation permettant d'introduire un certain *a priori* sur les coefficients de synthèse α . La norme ℓ_1 permet de modéliser un *a priori* de parcimonie.

On pourra se reporter aux slides **-Lasso Therapy : a sparse synthesis approach* pour une ouverture sur les approches parcimonieuses structurées.



Rappels mathématiques

Les objets mathématiques utilisés pour modéliser les signaux sont des vecteurs (au sens large). C'est-à-dire des éléments d'espace vectoriel, et on utilise en général des fonctions pour les signaux à temps continu, et des suites (c'est à dire des fonctions de $\mathbb{Z}$ à valeur dans $\mathbb{C}$) pour les signaux discrets.

Afin de pouvoir manipuler les signaux, on a besoin de définir des notions de distance et/ou de ressemblance entre eux. Ces notions sont données en mathématiques par les normes et les produits scalaires.

A.1. Normes et convergences

Soit E un espace vectoriel complexe. Une norme sur E est donnée par la définition suivante.

Définition A.1

(Norme)

Soit E un espace vectoriel complexe. Une norme $\|\cdot\|$ est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}_+$ telle que

- $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Les normes les plus utilisées sont les suivantes :

- Norme 1
 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$
 - Soit u une suite réelle ou complexe, $\|u\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|$
- Norme 2 (énergie)
 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$

A. Rappels mathématiques

— Soit u une suite réelle ou complexe, $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2}$

- Norme infinie

— Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$

— Soit u une suite réelle ou complexe, $\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|$

- De façon plus générale, les normes p :

— Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$

— Soit u une suite réelle ou complexe, $\|u\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p}$

On peut alors définir des espaces vectoriels normés couramment utilisés :

Définition A.2 (Espace $L^p(E)$)

L'ensemble des fonctions f de E avec une norme p finie est notée $L^p(E)$

En particulier, on s'intéressera à l'espace des fonctions réelles d'énergie finie $L^2(\mathbb{R})$. On définit de manière équivalente les espaces des suites $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Une norme, en plus de fournir une notion de distance, permet aussi de définir la notion de *convergence* et donc de *continuité*. Ces deux notions sont essentielles par la suite.

Définition A.3 (Convergence en norme)

Soit E un espace vectoriel complexe muni d'une norme $\|\cdot\|$. On dira qu'une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers $f \in E$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

On notera

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

On voit que suivant la norme choisie, la notion de convergence diffère. Ici encore, on considère les trois convergences classiques qui sont :

- La convergence *uniforme*, avec la norme infinie.
- La convergence *absolue*, avec la norme 1.
- La convergence *en énergie*, avec la norme 2.

Un espace E muni d'une norme sera dit complet, ou espace de Banach, si toute suite de Cauchy est une suite convergente.

A.2. Produits scalaires et espaces de Hilbert

“Physiquement”, un produit scalaire mesure la “corrélation” entre deux signaux. C'est une notion essentielle en traitement du signal. On rappelle la définition d'un produit scalaire sur un espace complexe.

Définition A.4 (Produit scalaire)

Soit E un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur E est une forme sesquilinéaire à gauche, à symétrie hermitienne, définie positive. C'est-à-dire, $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est un produit scalaire ssi

- sesquilinéaire à gauche
 - $\forall x, y, z \in E, \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
 - $\forall x, y, z \in E, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
 - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in E, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
 - $\forall \lambda \in \mathbb{C} \forall x, y \in E, \langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$

- à symétrie hermitienne

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

- définie

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

- positive

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$$

On peut alors définir l'orthogonalité entre deux signaux. Des signaux orthogonaux seront "aveugles" l'un par rapport à l'autre. C'est une notion importante, car si deux signaux sont orthogonaux, l'information portée par chacun est parfaitement complémentaire.

Définition A.5

Soit E un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Deux éléments $x, y \in E$ sont dits orthogonaux ssi

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

En traitement du signal, on utilisera principalement les deux produits scalaires suivant :

- Soit f, g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. On peut définir le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

- Soit u, v deux suites de $\ell^2(\mathbb{Z})$. On peut définir le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \bar{v}_n$$

Avec ces deux exemples, on voit que les normes 2 définies à la section précédente correspondent à la racine du produit scalaire. On peut montrer qu'on peut

A. Rappels mathématiques

toujours définir une norme comme la racine d'un produit scalaire d'un vecteur avec lui même (et cette norme sera appelée norme 2).

On peut maintenant définir les *espaces de Hilbert* qui sont des espaces de Banach munis d'un produit scalaire. On modélisera souvent par la suite les signaux comme des éléments d'espaces de Hilbert.

A.3. Bases orthonormées

Afin de représenter les signaux, on aura besoins de “briques” de bases. On introduit pour cela la notion de *bases orthonormées*.

Définition A.6 (Base orthogonale)

Une famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est orthogonale si pour tout $n \neq k$

$$\langle e_k, e_n \rangle = 0.$$

Si de plus la famille est *génératrice*, i.e. pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe une suite λ_n de $\mathbb{C}$ telle que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n e_n$$

alors $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une *base orthogonale* de $\mathcal{H}$.

Comme conséquence directe, si $\{e_n\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{H}$, on a pour tout $f \in \mathcal{H}$:

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|} e_n.$$

Une base orthormée est une base orthogonale telle que tous les éléments aient une norme égale à 1, i.e. $\|e_n\| = 1$ pour tout n . Les bases orthonormées ont des propriétés de “conservations de distance” très utiles, résumées dans les deux théorèmes suivants.

Théorème A.1 (Relation de Parseval)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Alors pour tout $f, g \in \mathcal{H}$, on a :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle \overline{\langle g, e_n \rangle}.$$

Le second théorème est obtenue en appliquant la relation de Parseval avec $f = g$.

Théorème A.2 (Formule de Plancherel-Parseval)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Alors pour

tout $f \in \mathcal{H}$, on a conservation de l'énergie :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 .$$

B

Notions d'optimisation convexe

classe de problème

$$f(x) + \Psi(x)$$

avec

- f L -Lipshitz différentiable et convexe,
- Ψ convexe.

Définition B.1

f est L -Lipshitz différentiable ssi il existe L tel que

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

Lemme B.1

si f est L -Lipshitz différentiable alors

$$|f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle| \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2$$

si de plus f est convexe, alors

$$0 \leq f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2$$

f étant L -Lipschitz différentiable, on a :

$$f(x) + \Psi(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 + \Psi(x) \quad (\text{B.1})$$

Soit

$$x^{(t+1)} = \operatorname{argmin} f(x^{(t)}) + \langle \nabla f(x^{(t)}), x - x^{(t)} \rangle + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 + \Psi(x) \quad (\text{B.2})$$

B. Notions d'optimisation convexe

on a alors

$$\begin{aligned}
 f(x^{(t+1)}) + \Psi(x^{(t+1)}) &\leq f(x^{(t)}) + \langle \nabla f(x^{(t)}), x^{(t+1)} - x^{(t)} \rangle + \frac{L}{2} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|^2 \\
 &\quad + \Psi(x^{(t+1)}), \text{ ((B.1) en } x = x^{(t+1)} \text{ } y = x^{(t)}) \\
 &\leq f(x^{(t)}) + \langle \nabla f(x^{(t)}), x - x^{(t)} \rangle + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 + \Psi(x), \forall x \text{ (par définition du minimiseur)} \\
 &\leq f(x^{(t)}) + \Psi(x^{(t)}) \text{ (en choisissant } x = x^{(t)})
 \end{aligned}$$

et on assure alors la décroissance. On peut réécrire (B.2) comme

$$x^{(t+1)} = \operatorname{argmin} \frac{1}{2} \|x - x^{(t)} + \nabla f(x^{(t)})/L\|^2 + \frac{1}{L} \Psi(x)$$

qu'on appelle opérateur de proximité dont la définition est

Définition B.2

soit $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. on appelle opérateur de proximité de Ψ , noté prox_Ψ , la fonction

$$\begin{aligned}
 \operatorname{prox}_\Psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
 y &\mapsto \operatorname{prox}_\Psi(y) = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|y - x\|^2 + \Psi(x)
 \end{aligned}$$

On peut alors écrire l'algorithme de descente proximale

$$x^{(t+1)} = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left(x^{(t)} - \frac{1}{L} \nabla f(x^{(t)}) \right)$$

Quelques opérateurs de proximité

Exemple B.1

(Norme ℓ_2)

Soit

$$\Psi(x) = \lambda \|x\|_2$$

alors

$$\operatorname{prox}_{\lambda \|\cdot\|_2}(y) = \frac{1}{1+\lambda} y$$

Démonstration. on dérive $\frac{1}{2} \sum |y_k - x_k|^2 + \lambda \sum x_k^2$ par rapport à x_k , et on annule la dérivée :

$$x_k - y_k + \lambda x_k = 0$$

d'où le résultat. □

Exemple B.2 (Norme ℓ_1)

Soit

$$\Psi(x) = \lambda \|x\|_1$$

alors

$$\text{prox}_{\lambda \|\cdot\|_1}(y) = \text{sgn}(y) (|y| - \lambda)^+$$

où $(x)^+ = \max(x, 0)$.

Démonstration. pas dérivable en 0. si $x_k > 0$, alors

$$x_k - y_k + \lambda x_k = 0$$

et de même pour $x_k < 0$, d'où

$$x_k = y_k - \lambda \text{sgn}(x_k).$$

si $y_k > 0$ et $x_k < 0$, alors $x_k = y_k + \lambda > 0$ ce qui est exclu. avec un raisonnement similaire pour $y_k < 0$ et $x_k > 0$, on trouve :

$$x_k = \text{sgn}(y_k) (|y_k| - \lambda)^+.$$

□

L'opérateur de proximité peut être vu comme la solution obtenue dans le cas particulier où Φ est une base orthonormée. On donne ci-après quelques propriétés de l'opérateur de proximité. Pour cela, on rappelle avant les définitions du sous-gradient et du sous-différentiel.

Définition B.3 (sous-gradient)

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. $s \in E$ est un sous gradient de f ssi

$$\forall y \in E \quad f(y) \geq f(x) + \langle s, y - x \rangle$$

Définition B.4 (sous-différentiel)

$\partial_f(x) = \{s, s \text{ sous gradient de } f\}$

Proposition B.1 (Caractérisation implicite du sous-différentiel)

$$p = \text{prox}_\Psi(x) \Leftrightarrow x - p \in \partial_\Psi(p)$$

Proposition B.2 (Firmly non expansif)

l'opérateur de proximité est firmly non expansif (et donc non expansif) ie

$$\begin{aligned} \|\text{prox}(x) - \text{prox}(y)\|^2 &\leq \langle \text{prox}(x) - \text{prox}(y), x - y \rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 - \|(I - \text{prox})x - (I - \text{prox})y\|^2 \end{aligned}$$

Proposition B.3 (Minimiseur et point fixe)

$$x = \operatorname{argmin} f(x) + \Psi(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left(x - \frac{1}{L} \nabla f(x) \right)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} x \text{ solution} &\Leftrightarrow 0 \in \partial_{f+\Psi}(x) = \partial_f(x) + \partial_\Psi(x) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial_\Psi(x) + \{\nabla f(x)\} \\ &\Leftrightarrow -\nabla f(x) \in \partial_\Psi(x) \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{L} \nabla f(x) \right) - x \in \frac{1}{L} \partial_\Psi(x) \\ &\Leftrightarrow x = \operatorname{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left(x - \frac{1}{L} \nabla f(x) \right) \end{aligned}$$

□

Théorème 16 (Vitesse de convergence de la descente proximale)

L'algorithme de descente proximale converge en $\mathcal{O}(1/t)$, où t est le nombre d'itérations.

Démonstration. Soit $F(x) = f(x) + \Psi(x)$ et $\ell_F(x; y) = f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \Psi(x)$. f étant convexe et L -Lipschitz différentiable, on a l'inégalité (Lemme B.1)

$$F(x) - \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \leq \ell_F(x; y) \leq F(y) \quad (\text{B.3})$$

Comme Ψ est convexe, on a aussi la "Three point property" suivante :

$$\Psi(x) + \|x - z\|^2 \geq \Psi(z^+) + \|z^+ - z\|^2 + \|x - z^+\|^2, \quad \forall x$$

où $z^+ = \operatorname{prox}_\Psi(z)$
d'où

$$\begin{aligned} F(x^{(t+1)}) &\leq \ell_F(x^{(t+1)}; x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|^2 \quad (\text{d'après (B.3)}) \\ &\leq \ell_F(x, x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 - \frac{L}{2} \|x - x^{(t+1)}\|^2 \quad (\text{d'après la three point property}) \\ &\leq F(x) + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 - \frac{L}{2} \|x - x^{(t+1)}\|^2 \quad \forall x \quad (\text{d'après (B.3)}) \end{aligned}$$

Soit $e_t = F(x^{(t)}) - F(x^*)$ et $\Delta_t = \frac{L}{2} \|x^* - x^{(t)}\|^2$. On a donc

$$e_{t+1} \leq \Delta_t - \Delta_{t+1}$$

En sommant

$$\sum_{k=0}^t e_{k+1} \leq \sum_{k=0}^t \Delta_k - \Delta_{t+1}$$

Or $e_{t+1} \leq e_t$, donc

$$(t+1)e_{t+1} \leq \Delta_0 - \Delta_{t+1} \leq \Delta_0$$

ie, le résultat voulu. $\square$

Remarque B.1 (Extension au cas d'une loss non convexe)

Si f est L -Lipshitz différentiable, mais non convexe, on a toujours

$$\begin{aligned} F(x^{(t+1)}) &\leq \ell_F(x^{(t+1)}; x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x^{(t+1)} - x^{(t)}\|^2 \text{ (d'après l'inégalité de gauche de (B.3))} \\ &\leq \ell_F(x, x^{(t)}) + \frac{L}{2} \|x - x^{(t)}\|^2 - \frac{L}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 \text{ (d'après la three point property)} \end{aligned}$$

mais on perd la dernière inégalité (car on perd l'inégalité de droite de (B.3)). Cette décroissance stricte de la fonction coût F permet toujours de conclure sur la convergence de l'algorithme vers un point critique de la fonction F , mais on perd toute notion de vitesse de convergence.

Cette convergence est trop lente en pratique. Version accélérée FISTA :

$$\begin{aligned} x^{(t)} &= \text{prox}_{\frac{1}{L}\Psi} \left(z^{(t)} - \frac{1}{L} \nabla f(z^{(t)}) \right) \\ z^{(t+1)} &= x^t + \frac{t}{t+5} (x^{(t+1)} - x^{(t)}) \end{aligned}$$